R1 - Eksamen H09

Løsningsskisser

Del 1

Oppgave 1

a)
Kjerneregel: $f(x) = 5e^u, u = 3x$
$f'(x) = 5e^u 3 = 15e^u = 15e^{3x}$

b)
Produktregel: $g'(x) = 3x^2\ln(2x) + x^3\frac{1}{2x}2 =$ (Kjerneregel på $\ln u, u = 2x$)
$3x^2\ln(2x) + x^2 = x^2(3\ln 2x + 1)$

c)
$p(x) = 2x^3 - 10x^2 - 2x + 10$
$p(1) = 2 - 10 - 2 + 10 = 0 \Leftrightarrow p(x)$ må ha $x - 1$ som faktor:
Polynomdivisjon:
$p(x) = 2x^3 - 10x^2 - 2x + 10 = (x-1)(2x^2 - 8x - 10)$
Faktoriserer videre og bruker abc-formel:
$p(x) = (x-1)2(x^2 - 4x - 5) = 2(x-1)(x+1)(x-5)$

Ligningen har altså løsningene $L = \{-1, 1, 5\}$

Det bør bemerkes at man kanskje bør se at dette kan gjøres ved direkte faktorisering:
$2x^3 - 10x^2 - 2x + 10 = 2x^2(x-5) - 2(x-5) = (2x^2 - 2)(x-5) = 2(x^2-1)(x-5) =$
$2(x-1)(x+1)(x-5)$

d)
$\lg(a^2b) - \lg(\frac{1}{ab}) = \lg\frac{a^2b}{\frac{1}{ab}} = \lg a^2bab = \lg a^3b^2$
$(= \lg a^3 + \lg b^2 = 3\lg a + 2\lg b)$
Eller:
$\lg a^2 + \lg b - (\lg 1 - \lg ab) = 2\lg a + \lg b - 0 + \lg a + \lg b = 3\lg a + 2\lg b$
$(= \lg a^3 + \lg b^2 = \lg a^3b^2)$

e)
Kontinuerlig: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
Dette kravet er egentlig 3 krav:

- $\lim_{x\to a} f(x)$ må eksistere (unikt, endelig tall)
- $f(a)$ må eksistere
- Høyre og venstre side må være lik hverandre

1) For $x = 1$ finnes funksjonsverdien $f(1) = 2$, men grenseverdien er ikke unik,
så funksjonen er diskontinuerlig for $x = 1$.

2)
Deriverbar⇒Kontinuerlig, men ikke omvendt, da funksjoner ikke er deriverbare i ***knekkpunkter***!
Kan også formuleres: Ikke kontinuerlig⇒Ikke deriverbar
):
Funksjonen er ikke deriverbar når x er -2, 0, 1 og 2.

f)
$\lim_{x\to-1} \frac{x(x^2-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to-1} x(x-1) = -1 \cdot (-1-1) = 2$

g)
1)
$A = (a,0), \qquad B = (a,a), \qquad C = (0,a)$

2)
$\overrightarrow{OB} = [a-0, a-0] = [a,a]$
$\overrightarrow{AC} = [0-a, a-0] = [-a,a]$

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = [a,a] \cdot [-a,a] = -a^2 + a^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC} \qquad QED$

h)
1)
Retningsvektor: $\overrightarrow{AB} = [2-1, 4-2] = [1,2]$

Vektorform: $l: \quad [x,y] = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = [1,2] + t[1,2] \Leftrightarrow$

Parameterform: $l: \quad \left\{ \begin{array}{c} x = 1+t \\ y = 2+2t \end{array} \right\}$

2)
Retningsvektor: $[-2,1]$

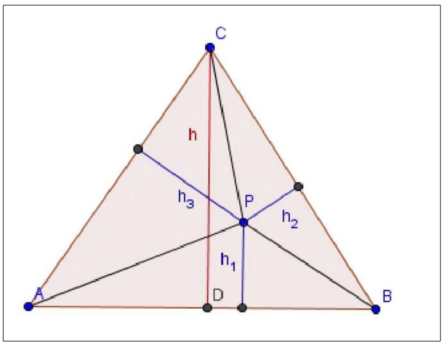
$m: \quad [x,y] = [6,2] + s[-2,1] \Leftrightarrow m: \quad \left\{ \begin{array}{c} x = 6-2s \\ y = 2+s \end{array} \right\}$

Skjæringspunkt:
$1 + t = 6 - 2s \wedge 2 + 2t = 2 + s \Leftrightarrow$
$1 + t = 6 - 2s \wedge 2(1+t) = 2 + s \Leftrightarrow$
$1 + t = 6 - 2s \wedge 2(6-2s) = 2 + s \Leftrightarrow$
$t = 1 \wedge s = 2$

Innsetting i l eller m gir: $S = (2,4)$

Oppgave 2

a)



Vivianis setning: $h_1 + h_2 + h_3 = h$

(Der h_1, h_2 og h_3 står normalt på sidene AB, BC og CA.)

b)
$ABC = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{sh}{2} \qquad (s = AB = BC = CA)$

$ABC = ABP + BCP + CAP = \frac{sh_1}{2} + \frac{sh_2}{2} + \frac{sh_3}{2} = \frac{s}{2}(h_1 + h_2 + h_3)$

Ligning: $\frac{sh}{2} = \frac{s}{2}(h_1 + h_2 + h_3) \Leftrightarrow h_1 + h_2 + h_3 = h \qquad QED$

Del 2

Oppgave 3

a)
Sannsynlighet for positiv test, gitt at personen er syk: $P(T|S) = 0.96$
Sannsynlighet for å positiv test, gitt at personen ikke er syk: $P(T|\bar{S}) = 0.05$

Sannsynlighet for negativ test, gitt at personen ikke er syk:
$P(\bar{T}|\bar{S}) = 1 - P(T|\bar{S}) = 1 - 0.05 = 0.95$

b)
$P(S) = 0.03$ (Relativt sjelden sykdom, altså fare for False Positiv Paradox!)
$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0.03 = 0.97$
Total sannsynlighet:
$P(T) = P(S)P(T|S) + P(\bar{S})P(T|\bar{S}) = 0.03 \cdot 0.96 + 0.97 \cdot 0.05 = 0.0773$

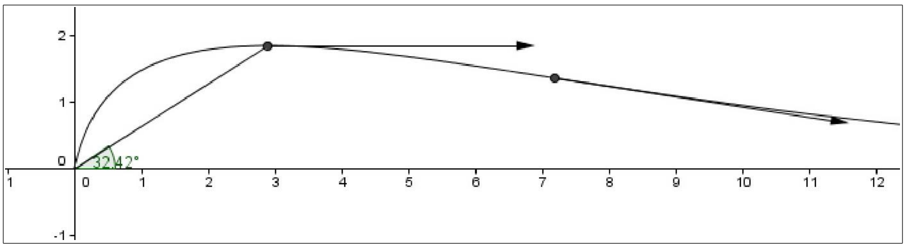
c)
Baye: $P(S|T) = \frac{P(T|S)P(S)}{P(T)} = \frac{0.96 \cdot 0.03}{0.0773} = 0.373$ (Mange falske positiver! 63%!)

d)
Baye igjen: $P(S|\bar{T}) = \frac{P(\bar{T}|S)P(S)}{P(\bar{T})} = \frac{(1-0.96) \cdot 0.03}{1-0.0773} = 0.00130$ (Ikke så mange falske negativer...)

Oppgave 4 - Alternativ I

Posisjonsvektor: $\vec{r}(t) = [4t - 3te^{-t}, 5te^{-t}]$ [m], $t \geq 0$ [s]

a)
Posisjon etter 1 sekund: $\vec{r}(1) = [4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot e^{-1}, 5 \cdot 1 \cdot e^{-1}] = [2.90, 1.84]$ [m]



b)
Produktregel og kjerneregel: $(te^{-t})' = 1e^{-t} + te^{-t}(-1) = e^{-t} - te^{-t}$

Fartsvektor: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = [4 - 3(e^{-t} - te^{-t}), 5(e^{-t} - te^{-t})] =$
$[3te^{-t} - 3e^{-t} + 4, 5e^{-t} - 5te^{-t}]$ [m/s]

Akselerasjonsvektor:
$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = [3(e^{-t} - te^{-t}) - 3e^{-t}(-1), 5e^{-t}(-1) - 5(e^{-t} - te^{-t})] =$
$[6e^{-t} - 3te^{-t}, 5te^{-t} - 10e^{-t}]$ [m/s^2]

c)
$\vec{v}(2) = [3 \cdot 2 \cdot e^{-2} - 3e^{-2} + 4, 5e^{-2} - 5 \cdot 2 \cdot e^{-2}] = [4.41, -0.677]$

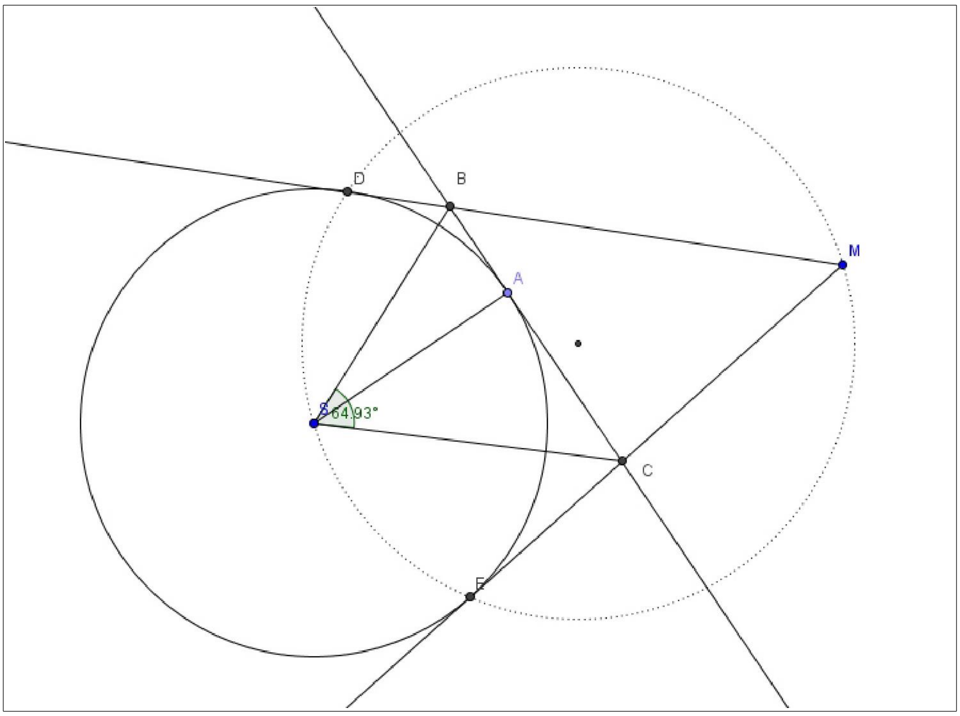
$|\vec{v}(2)| = \sqrt{4.41^2 + 0.677^2} = 4.46$ [m/s]

d)
Høyeste punkt når $\vec{v}(t)$ vannrett:
$5e^{-t} - 5te^{-t} = 0 \Leftrightarrow 5e^{-t}(1 - t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ [s]

e)
Samme vinkel som mellom $\vec{r}(t)$ og x-aksen:
$\tan\alpha = \frac{1.84}{2.90} = 0.63448 \Leftrightarrow \alpha = 32.4^\circ$
(Koordinatene til $\vec{r}(1)$ regnet ut i a).)

Oppgave 4 - Alternativ II

a)



Tangeringspunkter D og E vha. Thales sirkel gjennom M og S med sentrum midt mellom S og M.
Linjen gjennom B og C som normal på SA.
(Bør nok skrive litt mer enn dette...)

(Konstruksjonsforklaring (Meny: Vis, Konstruksjonsforklaring) i GeoGebra godtaes som forklaring på eksamen...)

b)
$SDB \cong SAB$: To sider er like (radius og felles hypotenus),
begge rettvinklede (radius normal på tangent)

$SEC \cong SAC$: Helt tilsvarende...

Da må også flere vinkler være like:

$\angle DSB = \angle ASB = \alpha$

$\angle ESC = \angle CSA = \beta$

$\angle ESD = \alpha + \alpha + \beta + \beta = 2\alpha + 2\beta$

$\angle CSB = \alpha + \beta = \frac{1}{2} \angle ESD \qquad QED$

c)
Når A flyttes endres bare punktene C og B, mens S, E og D ligger i ro.
$\angle ESD$ endres altså ikke, og da $\angle CSB$ er halvparten av $\angle ESD$ endres heller ikke $\angle CSB$.

Oppgave 5

a)
Synke mot høyre: $a < 0$

Linje gjennom $(2,1)$ med stigningstall a:

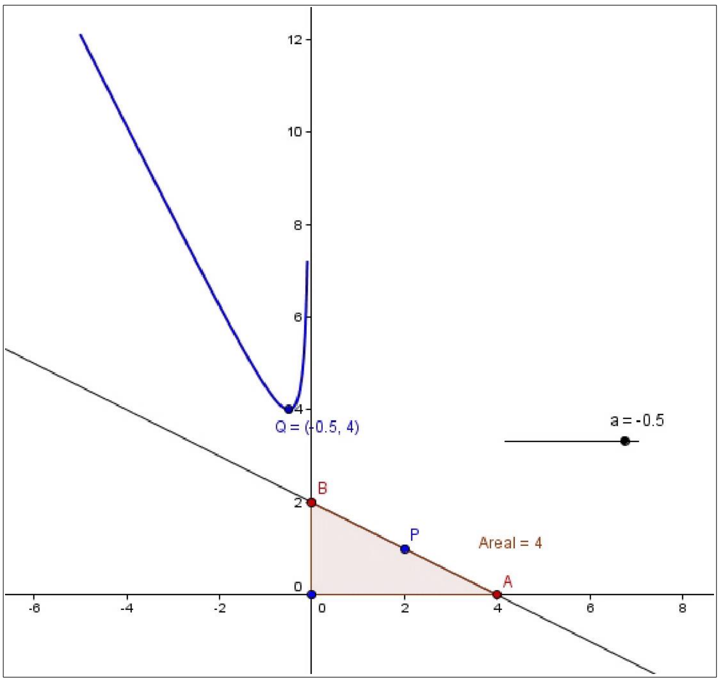
$$y - 1 = a(x - 2) \Leftrightarrow y = ax - 2a + 1 \qquad QED$$

b)

$B: \quad x = 0 \Leftrightarrow y = 1 - 2a \quad): \quad B = (0, 1 - 2a)$

$A: \quad y = 0 \Leftrightarrow 0 = x - 2a + 1 \Leftrightarrow x = 2a - 1 \quad): \quad A = (2a - 1, 0)$
$F(a) = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{(2a-1)(1-2a)}{2} = -\frac{(2a-1)^2}{2} \qquad QED$

c)



Med lommeregner:
Y1=-(2X-1) ^2/(2X) og CALC, minimum

Får minste areal 4 når $x = -0.5$.

d)
Kjerneregel: $(2a - 1)^2 = u^2, u = 2a - 1$
$((2a - 1)^2)' = 2u \cdot 2 = 4u = 4(2a - 1)$
Brøkregel: $F'(a) = -\frac{4(2a-1)2a-(2a-1)^2 2}{4a^2} = -\frac{2(2a-1)(4a-(2a-1))}{4a^2} = -\frac{2(2a-1)(2a+1)}{4a^2} = \frac{(2a-1)(-2a-1)}{2a^2} \qquad QED$

e)

$F'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a - 1 = 0 \vee 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \vee a = -\frac{1}{2}$
Fortegnslinje:

$$\begin{array}{lccccc} & & -\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \\ F'(a)\ : & \text{- - - - - -} & \text{o} & \text{———><———} & \text{o} & \text{- - - - - -} \end{array}$$

Minst areal når $a = -\frac{1}{2}$

Minst areal: $F(-\frac{1}{2}) = -\frac{(-1-1)^2}{-1} = 4$

Linjen er da: $y = -\frac{1}{2}x - 2(-\frac{1}{2}) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$