R1 - Eksamen V09

22.05.10

Løsningsskisser

Delprøve 1

Oppgave 1

a)

1) Kjerneregel: $f(x) = u^4, \qquad u = x^2 + 1$
$f'(x) = 4u^3 2x = 8x(x^2 + 1)^3$

2) Produktregel (og kjerneregel på e^{2x}):
$g'(x) = 1e^{2x} + xe^{2x}2 = (1 + 2x)e^{2x}$

b)

$\lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x = 2$

c)

$$\frac{(x-2)(x-2)-(x+2)^2-4xx}{x(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-4x+4-(x^2+4x+4)-4x^2}{x(x+2)(x-2)} = \frac{-8x-4x^2}{x(x+2)(x-2)} = -\frac{4x(2+x)}{x(x+2)(x-2)} = -\frac{4}{x-2}$$

d)

1) $\overrightarrow{AB} = [7,5], \qquad \overrightarrow{AC} = [6,8], \qquad \overrightarrow{BC} = [-1,3]$

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = [7,5] \cdot [6,8] = 7 \cdot 6 + 5 \cdot 8 = 82$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = [7,5] \cdot [-1,3] = 7(-1) + 5 \cdot 3 = 8$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = [6,8] \cdot [-1,3] = 6(-1) + 8 \cdot 3 = 18$

Ingen skalarprodukt er null, så ingen av disse vektorene står normalt på hverandre.

e)

$f(x) = 2x^3 + 8x^2 + 2x - 12$

1) $f(1) = 2 + 8 + 2 - 12 = 0$

$(x - 1)$ er faktor, så polynomdivisjonen $2x^3 + 8x^2 + 2x - 12 : x - 1$
gir: $f(x) = (x - 1)(2x^2 + 10x + 12) = 2(x - 1)(x^2 + 5x + 6)$

Andregradsformelen gir: $f(x) = 2(x - 1)(x + 3)(x + 2)$

2) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2(x - 1)(x + 3)(x + 2) \leq 0$

$x - 1$ - - - - - - - - - - - - - - - -o————————————

$x+3$ - - - - -o————————————————————

$x+2$ - - - - - - - - -o————————————————

$f(x)$ - - - - -o———o- - - - - - -o—————————————

$L = \langle -\infty, -3] \cup [-2, 1]$

f)

$$\lg(\tfrac{1}{a^2}) + 3\lg a = \lg 1 - \lg a^2 + 3\lg a = 0 - 2\lg a + 3\lg a = \lg a$$

Oppgave 2

a)

$ABC \sim ACD$:

Begge er rettvinklede

$\angle A$ felles

$ABC \sim CBD$:

Begge er rettvinklede

$\angle B$ felles

b)

$ABC \sim ACD$ gir foholdet: $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow AC^2 = AB \cdot AD$

$ABC \sim CBD$ gir forholdet: $\frac{BC}{AB} = \frac{DB}{BC} \Leftrightarrow BC^2 = AB \cdot DB$

c)

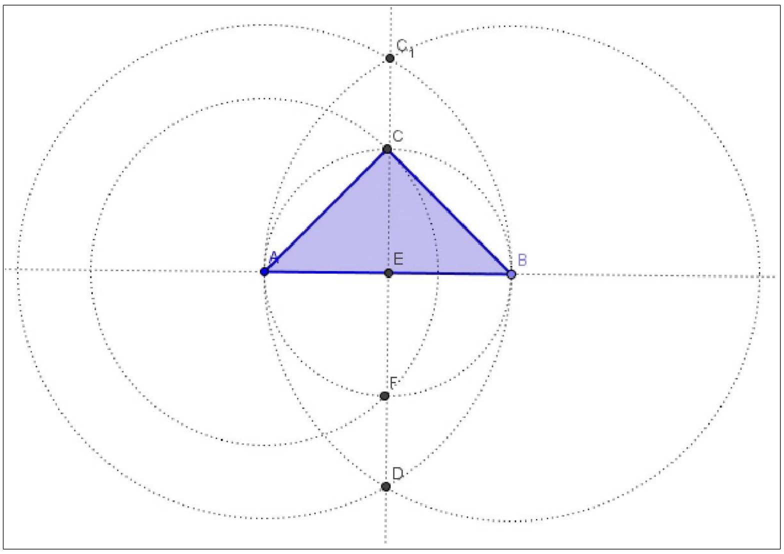
$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB = AB(AD + DB) = AB \cdot AB = AB^2$$

QED

Oppgave 3

a)

1)

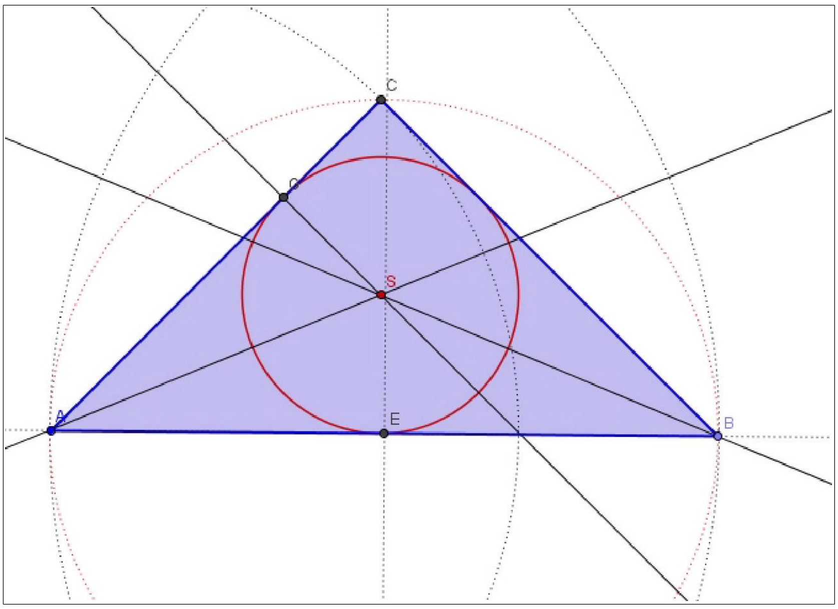


Punkt A, Sirkel med radius 10 cm, B på sirkel, linje AB.

Sirkel med radius 7 cm, C som skjæringspunkt med sirkel med AB som diameter; Thales.

2)

Innsenter ligger på skjæringspunktet mellom halveringslinjene for vinklene i trekanten:



b)

$$(\ln x)^2 + \ln x^2 - 3 = 0, \qquad x > 0$$
$$(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$u^2 + 2u - 3 = 0, \qquad u = \ln x$$
$$u = 1 \vee u = -3$$
$$\ln x = 1 \vee \ln x = -3$$
$$x = e \vee x = e^{-3} \approx 0.0498$$

c)

Sannsynligheter for at en tilfeldig mobiltelefon:

Kommer fra A: $P(A) = 0.7$
Kommer fra B: $P(B) = 0.3$
Har feil: $P(F|A) = 0.05$
$P(F|B) = 0.1$

1) Total sannsynlighet:

$$P(F) = P(F \cap A) + P(F \cap B) = P(A)P(F|A) + P(B)P(F|B) = 0.7 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.1 = 0.065$$

2) Baye:

$$P(A|F) = \frac{P(F|A)P(A)}{P(F)} = \frac{P(F|A)P(A)}{P(A)P(F|A)+P(B)P(F|B)} = \frac{0.05 \cdot 0.7}{0.065} \approx 0.538$$

Oppgave 4 - Alternativ I

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx - 11$$

a)

Bunnpunkt: $BP = (-1, -16)$): $f(-1) = -16 \Leftrightarrow$

$$-16 = 1 + a - b - 11 \Leftrightarrow a - b = -6 \qquad (I)$$

Dessuten: $f'(-1) = 0$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$$

$$0 = -3 - 2a + b \Leftrightarrow 2a - b = -3 \qquad (II)$$

Ligning I og II gir:

$II - I$: $a = 3$

Innsatt i I : $b = a + 6 = 3 + 6 = 9$

QED

b)

$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3) = -3(x + 1)(x - 3)$ (abc-formel)

-1 3

Fortegnslinje gir: $f(x)$: - - - - -o————————o- - - - - -

$f(x)$ voksende i $\langle -1, 3\rangle$ og avtagende i $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -3, \infty\rangle$

$TP = (3, f(3)) = (3, -3^3 + 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 11) = (3, 16)$

c)

$f''(x) = -6x + 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vendepunkt: $VP = (1, f(1)) = (1, 0)$

d)

Tangenter med stigningstall 9:

$f'(x) = 9 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 9 = 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0$

): Tangenter for $x = 0$ og $x = 2$

$x = 2$: $y - f(2) = 9(x - 2) \Leftrightarrow y - 11 = 9x - 18 \Leftrightarrow y = 9x - 7$

$x = 0$: $y - f(0) = 9(x - 0) \Leftrightarrow y - (-11) = 9x \Leftrightarrow y = 9x - 11$

e)

Graf...

Uklar oppgave, forutsetter at a og b i første delen fortsatt er 3 og 9.

(Oppgaven burde skrevet ligningen som $f(x) = 9x + c$ for å gjøre dette helt klart.)

Linjen $l : y = 9x + b$ er alltid parallell med tangentene i d)

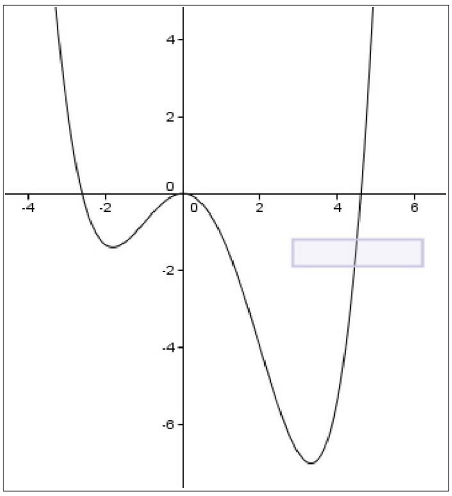
l vil skjære tre ganger når l ligger mellom tangentene i d),

det vil si når $-11 < b < -7$

Oppgave 4 - Alternativ II

a)

$f(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 2x^3 - 12x^2) = \frac{x^2}{12}(x^2 - 2x - 12)$



b)

$$f'(x) = \tfrac{1}{12}(4x^3 - 6x^2 - 24x) = \tfrac{x}{6}(2x^2 - 3x - 12)$$
$$f''(x) = \tfrac{1}{12}(12x^2 - 12x - 24) = (x+1)(x-2) \qquad \text{(abc-formel)}$$

                                                  -1   2

Fortegnslinje gir: $f''(x)$ ———o- - - - - -o————

Vendepunkt: $S = (-1, f(-1)) = (-1, -\tfrac{3}{4})$
$P = (2, f(2)) = (2, -4)$

c)

Linje gjennom S og P: $y - (-\tfrac{3}{4}) = \frac{-4-(-\frac{3}{4})}{2-(-1)}(x - (-1)) \Leftrightarrow$
$y = -\tfrac{13}{12}x - \tfrac{11}{6}$

Skjæringspunkter med $f(x)$: $\tfrac{1}{12}(x^4 - 2x^3 - 12x^2) = -\tfrac{13}{12}x - \tfrac{11}{6} \Leftrightarrow$
$x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 13x + 22 = 0$

Fjerdegradsligning, men, vi kjenner to løsninger: $x = -1 \vee x = 2$

Så $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$ må være en faktor i venstresiden av ligningen, og polynomdivisjon gir:

$$\begin{array}{llllll}
x^4 & -2x^3 & -12x^2 & +13x & +22 & = (x^2 - x - 2)(\;x^2 \;\; -x \;\; -11) \\
x^4 & -x^3 & -2x^2 & & & \\
 & -x^3 & -10x^2 & +13x & & \\
 & -x^3 & +x^2 & +2x & & \\
 & & -11x^2 & +11x & +22 & \\
 & & -11x^2 & +11x & +22 &
\end{array}$$

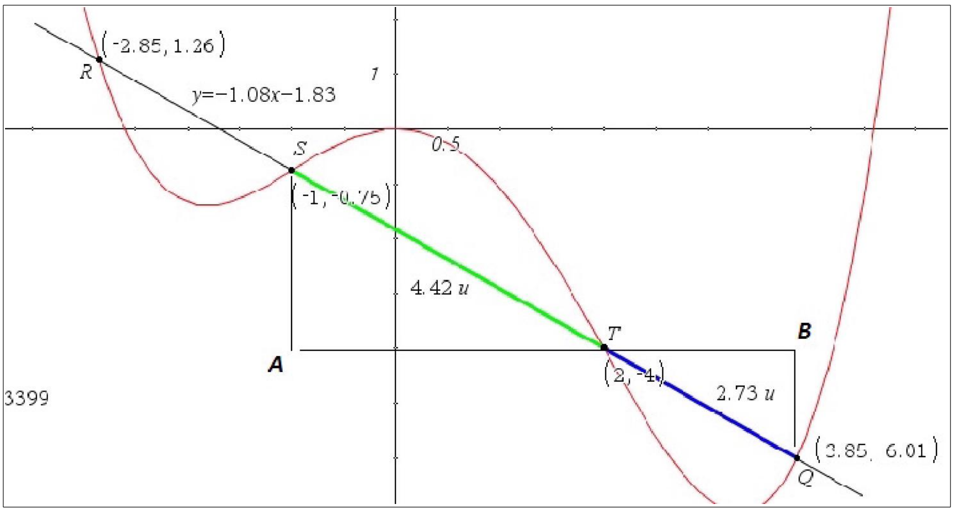
$x^2 - x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

$$R = \left(\tfrac{1-3\sqrt{5}}{2}, f(\tfrac{1-3\sqrt{5}}{2})\right) = \left(\tfrac{1-3\sqrt{5}}{2}, \tfrac{13\sqrt{5}-19}{8}\right) \approx (-2.85, 1.26)$$
$$Q = \left(\tfrac{1+3\sqrt{5}}{2}, f(\tfrac{1+3\sqrt{5}}{2})\right) = \left(\tfrac{1+3\sqrt{5}}{2}, \tfrac{-13\sqrt{5}-19}{8}\right) \approx (3.85, -6.01)$$

d)

Q har altså $x = \frac{1+3\sqrt{5}}{2} \approx 3.85$

Ser vi på figuren ser vi at det søkte forholdet også er forholdet mellom projeksjonene på en linje parallell med x-aksen. (Dette for å slippe så mye regning :-))



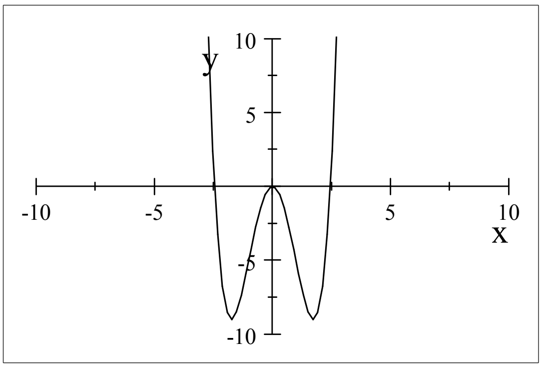
$$\frac{ST}{TQ} = \frac{AT}{TB} = \frac{x_T - x_S}{x_B - x_T} = \frac{2-(-1)}{\frac{1+3\sqrt{5}}{2}-2} = \frac{3}{\frac{1+3\sqrt{5}-4}{2}} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}} = \frac{6}{3\sqrt{5}-3} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} =$$

$$\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618\ldots = \Phi \qquad \text{(Det gyldne snitt!)}$$

e)

1)

$g(x) = x^4 - 6x^2 = x^2(x^2 - 6)$ (Symmetrisk om y-aksen...)



2) $g'(x) = 4x^3 - 12x$

$g''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x-1)(x+1)$

-1 1

Tall-linjer gir: $g'(x)$: ——o- - - - - -o————

Vendepunkter: $S_1 = (-1, g(-1)) = (-1, -5)$

$T_1 = (1, g(1)) = (1, -5)$

3)

Da vendepunktene har samme y-koordinat blir linjen gjennom dem: $y = -5$

De andre skjæringspunktene: $g(x) = -5 \Leftrightarrow$

$x^4 - 6x^2 = -5 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 6(x^2) + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \vee x^2 = 5 \Leftrightarrow$

$x = -1 \vee x = 1 \vee x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$

Andre skjæringspunkter: $(-\sqrt{5}, g(-\sqrt{5})) = (-\sqrt{5}, -5)$

$(\sqrt{5}, g(\sqrt{5})) = (\sqrt{5}, -5)$

4)

Bruker igjen projeksjonene på en linje parallell med x-aksen for å slippe å regne med y-verdier:

$$\frac{S_1T_1}{T_1Q_1} = \frac{x_{T_1}-x_{S_1}}{x_{Q_1}-x_{T_1}} = \frac{1-(-1)}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \Phi$$

Dere bør antagelig kommentere omtrent slik:
"***Igjen*** får vi det gyldne snitt! Dette ***kan*** tyde på at dette gjelder generelt,
og det kan være interessant å undersøke dette nærmere med digitale hjelpemidler!"
(Hvis vi prøver med det ***andre*** skjæringspunktet får vi også det gyldne snitt.
Faktisk gjelder dette helt generelt for fjerdegradsfunksjoner;
linjen gjennom vendepunktene deles av grafen i tre deler og forholdet mellom
den midterste delen og den ene eller den andre av de ytterste delene blir alltid det gyldne snitt!)

Oppgave 5

a)

$$\overrightarrow{OA} = [a,0], \qquad \overrightarrow{OB} = [b,c], \qquad \overrightarrow{AB} = [b-a,c]$$
$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = [a,0] + \tfrac{1}{2}[b-a,c] = [a + \tfrac{b}{2} - \tfrac{a}{2}, \tfrac{c}{2}] = [\tfrac{a+b}{2}, \tfrac{c}{2}]$$
$$\overrightarrow{OM_2} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \tfrac{1}{2}[b,c] = [\tfrac{b}{2}, \tfrac{c}{2}]$$
$$\overrightarrow{OM_3} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \tfrac{1}{2}[a,0] = [\tfrac{a}{2}, 0]$$

Koordinatene til punktene tilsvarer vektorkoordinatene.

b)

S på OM_1 : $\qquad \overrightarrow{OS} = x\overrightarrow{OM_1}$

S på AM_2 : $\qquad \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{AM_2}$

c)

De to uttrykkene for $\overrightarrow{OS}$ i b) gir oss:

$$x\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{AM_2} \Leftrightarrow$$
$$x\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OA} + y(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OA}) \Leftrightarrow$$
$$x[\tfrac{a+b}{2}, \tfrac{c}{2}] = [a,0] + y([\tfrac{b}{2}, \tfrac{c}{2}] - [a,0]) \Leftrightarrow$$
$$x[\tfrac{a+b}{2}, \tfrac{c}{2}] = [a,0] + y[\tfrac{b}{2} - a, \tfrac{c}{2}] \Leftrightarrow$$

X: $\qquad x\frac{a+b}{2} = a + y(\frac{b}{2} - a)$
Y: $\qquad x\frac{c}{2} = y\frac{c}{2}$

X gir: $\qquad x = y$
Innsatt i Y:

$$x\tfrac{a+b}{2} = a + x(\tfrac{b}{2} - a) \Leftrightarrow x\tfrac{a+b}{2} = a + x\tfrac{b}{2} - ax \Leftrightarrow$$
$$x(\tfrac{a}{2} + \tfrac{b}{2} - \tfrac{b}{2} + a) = a \Leftrightarrow$$
$$x\tfrac{3a}{2} = a \Leftrightarrow$$
$$x = y = \tfrac{2}{3}$$

d)

$$\overrightarrow{OS} = x\overrightarrow{OM_1} = \tfrac{2}{3}[\tfrac{a+b}{2}, \tfrac{c}{2}] = [\tfrac{a+b}{3}, \tfrac{c}{3}] \Leftrightarrow S = (\tfrac{a+b}{3}, \tfrac{c}{3})$$

e)

$$\frac{|\overrightarrow{OS}|}{|\overrightarrow{OM_1}|} = x = \tfrac{2}{3} \qquad \text{(Etter b))}$$

$\frac{|\overrightarrow{AS}|}{|\overrightarrow{AM_2}|} = y = \frac{2}{3}$ (Etter b))

Det siste forholdet:

$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OB} = [\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}] - [b, c] = [\frac{a-2b}{3}, -\frac{2c}{3}] = \frac{1}{3}$

$\overrightarrow{BM_3} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OB} = [\frac{a}{2}, 0] - [b, c] = [\frac{a-2b}{2}, -c] = \frac{1}{2}[a - 2b, -2c]$

$\frac{|\overrightarrow{BS}|}{|\overrightarrow{BM_3}|} = \frac{\frac{1}{3}|[a-2b,-2c]|}{\frac{1}{2}|[a-2b,-2c]|} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

Vi har ført et vektorbevis for at:

Skjæringspunktet (tyngdepunktet) mellom medianene i en trekant deler medianene i forholdet $2 : 1$.

Eller sagt på en annen måte:

Den største delen av medianene er $\frac{2}{3}$ av hele medianen.

f)

$A = (a, 0) = (6, 0) : \quad a = 6$

$S = (\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}) = (1, 4) : \quad \frac{a+b}{3} = 1 \wedge \frac{c}{3} = 4 \Leftrightarrow$

$b = 1 \cdot 3 - a = 3 - 6 = -3 \wedge c = 12$

): $\quad B = (b, c) = (-3, 12)$