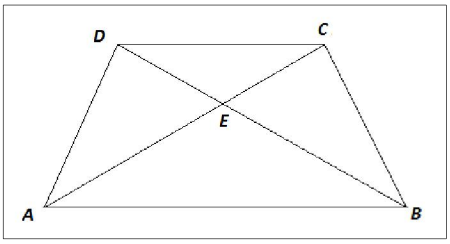
R1 - 6.1-6.4 Geometri

Løsningsskisse

I

Figuren viser et trapes $ABCD$, hvor $\angle CAB = 30°$, $\angle DBC = 40°$, $\angle BDC = 30°$



a) Hvilke kongruente trekanter finner du her?
b) Hvilke formlike trekanter finner du her?
c) Finn alle vinklene i trapeset.

Viktig**: **Les oppgaven godt, tenk deg godt om og svar på alle spørsmål!
Få med alle løsninger og alternativer!

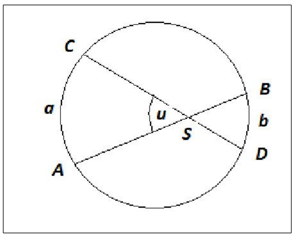
c)
Egentlig enklest å ta c) først:
Linjer overskåret av paralleller gir:
$\angle CAB = \angle ACD = \angle BDC = \angle ABD = 30°$

Vinkelsummen i ABC gir da $\angle ACB = 80°$,
så trapeset er symmetrisk med vinklene $70°, 70°, 110°, 110°$

a)
Kongruente: $AED = BEC, ABC = BAD, ACD = BDC$

b)
Formlike:
$ABE \sim CDE$ (De kontruente i a) er selvfølgelig også formlike.)

II



Punktene A, B, C og D ligger på en sirkel. Linjestykkene AB og CD skjærer hverandre i et punkt S.
$\angle ASC = u$, buen $AC = a$ og buen $BD = b$.
Vis at $u = \frac{a+b}{2}$

Viktig**: **Vis og bevis må gjelde generelt, ikke for spesialtilfeller!
Ikke forutsett ting som ikke står i oppgaven. (S er ikke sentrum i sirkelen!)
Bruk hjelpelinjer!
Når sirkeler er med i bildet, må man se etter sentral- og periferivinkler!

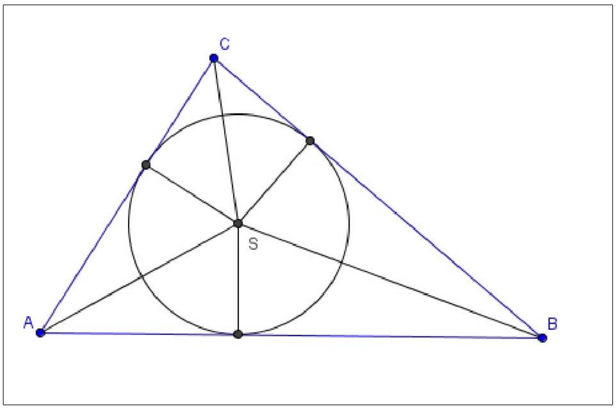
Trekker en hjelpelinje AD.
I trekanten ADS har vi da:

Periferivinkler: $\angle DAB = \frac{b}{2}$, $\angle ADS = \frac{a}{2}$

Vinkelsum: $\angle ASD = 180^\circ - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$

Dessuten: $u = 180^\circ - \angle ASD = 180^\circ - (180^\circ - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}) = \frac{a+b}{2}$ *QED*

III



Figuren viser en sirkel inskrevet i en trekant med sider $AB = a, BC = b$ og $CA = c$.
Radien i sirkelen er r.

a) Bevis at arealet av trekanten er $T = \frac{r(a+b+c)}{2}$

b) Vi setter $a = 7, b = 6$ og $c = 5$.

1) Finn $\angle BAC$ ved hjelp av cosinus-setningen.
($b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle BAC$)

2) Finn arealet av trekanten.

3) Finn radien i den innskrevne sirkelen.

***Viktig**: Gjør b) oppgave selv om du ikke får til a) !*

a) r er høyde i trekantene ABS, BCS og CAS

$$ABC = T = ABS + BCS + CAS = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r}{2}(a+b+c) \qquad QED$$

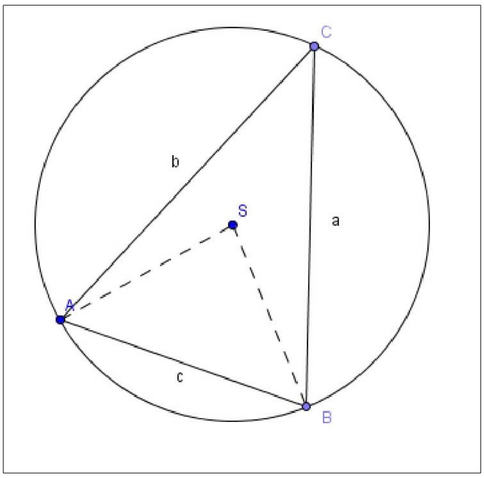
b)

1) $\cos\angle BAC = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{7^2+5^2-6^2}{2\cdot 7\cdot 5} = \frac{19}{35} = 0.54286 \Rightarrow \angle BAC = 57.1^\circ$

2) $T = \frac{AB\cdot AC\cdot \sin\angle BAC}{2} = \frac{7\cdot 5\cdot \sin(57.1^\circ)}{2} = 14.69$

3) $r = \frac{2\cdot T}{a+b+c} = \frac{2\cdot 14.69}{7+6+5} \approx 1.63$

IV



En trekant ABC er innskrevvet i en sirkel med sentrum S og radius r.
a) Vis at $2r\sin C = c$
b) Vis at $2r = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
c) I en trekant ABC er $\angle A = 40°$. Den motstående siden til $\angle A$ har lengden 6.3 cm. Finn radien i den omskrevne sirkelen til trekanten.

***Viktig**: **Igjen, ikke lag spesialtilfeller, påstander skal (be)vises generelt**!*
***Gjør c) selvom du ikke får til a) og b)** !*

Dette er det klassiske beviset for sinus-proporsjonen dere lærte ifjor!
a) Vi kaller midtpunktet av AB for M og kan regne litt:
Sentral- og periferivinkler: $\angle ASB = 2\angle ACB = 2\angle C$
Symmetri: $\angle BSM = \angle ASM = \frac{\angle ASB}{2} = \frac{2\angle C}{2} = \angle C$

$$\sin\angle BSM = \sin C = \frac{MB}{BS} = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r} \Leftrightarrow 2r\sin C = c \qquad QED$$

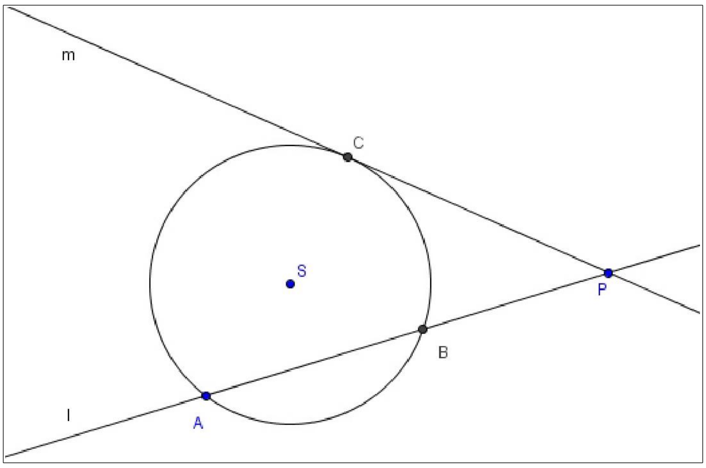
b) Vi kan gjenta resonnementet i a) for de to andre vinklene $\angle B$ og $\angle C$ og får da:
$2r\sin A = a$ og $2r\sin B = b$
som igjen gir:
$$2r = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad QED$$

(a) gir $2r\sin C = c \Leftrightarrow 2r = \frac{c}{\sin C}$)

c) $2r = \frac{a}{\sin A} \Leftrightarrow r = \frac{a}{2\sin A} = \frac{6.3}{2\sin 40°} \approx 4.90$

V

Figuren viser en sirkel og et punkt P utenfor sirkelen, hvor det er trukket en linje gjennom P som skjærer sirkelen i A og B:



Begrepet "punktets (P) potens" er da definert som produktet

$AP \cdot BP$

og dette produktet er konstant hvis P holdes i ro men linjen l forandres ved å flytte A (eller B) rundt på sirkelen.
Punktet C kan sees som et spesialtilfelle der de to skjæringspunktene har gått sammen til et tangeringspunkt.
Da blir punktets potens CP^2 slik at vi har: $AP \cdot BP = CP^2$.

Vi lar AB være diameter i sirkelen.
Bruk punktets potens til å vise Pythagoras for trekanten SPC. ($SC^2 + CP^2 = SP^2$)

Oppgavens beskrivelse av punktets potens gir oss:

$AP \cdot BP = CP^2 \Leftrightarrow (SP + r)(SP - r) = CP^2 \Leftrightarrow SP^2 - r^2 = CP^2 \Leftrightarrow SP^2 = r^2 + CP^2$
Hvilket er det vi skulle bevise, da $r = SC$.

Viktig:
Når en sirkel er involvert er det naturlig å bruke radien til noe!

Generelt om geometrioppgaver

- Ikke kluss med figurer på oppgaveark; tegn nye figurer, gjerne flere, og lag ***store*** figurer!
- Utnytt ***all*** informasjon i oppgaver:
  - Trekanter:
    - Areal
    - Vinkelsum 180°
    - Formlikhet og forhold
    - Pythagoras, hvis trekanter er rettvinklede
    - Omskreven og innskreven sirkel. (Selvom de kanskje ikke er der fra starten av.)
    - "Mer om trekanter i boken":
      - Medianer og tyngdepunkt
      - Høyder og ortosenter
      - Midtnormaler og omsenter
      - Halveringslinjer og innsenter
  - Sirkler:
    - Radius og diameter
    - Thales setning
    - Sentral- og periferivinkler

  - (Punktet potens er også et godt verktøy, selvom det ikke står i læreplanen!)
- Andre figurer:
  - Del opp i trekanter, bruk hjelpelinjer!