R2 Eksamen V2011 - 31.05.2011

Del 1 - Uten hjelpemidler

Oppgave 1

a)

1) Kjerneregel: $f(x) = 2\sin u, \qquad u = 2x$
$f'(x) = 2\cos u \cdot 2 = 4\cos(2x)$

2) Produktregel (og kjerneregel på $\cos 2x$):
$g'(x) = 2x\cos(2x) + x^2(-\sin 2x)2 =$
$2x(\cos 2x - x\sin 2x)$

3) Kjerneregel: $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{u}, \qquad u = x^2 - 4x$
$h'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{u}}(2x-4) = \frac{x-2}{2\sqrt{x^2-4x}}$

b)

1) Delvis integrasjon:
$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$

2) Delbrøkoppspaltningen $\frac{5x+3}{x^2-9} = \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x+3}$
gir: $\int \frac{5x+3}{x^2-9}dx = \int \frac{3}{x-3}dx + \int \frac{2}{x+3}dx = 3\ln|x-3| + 2\ln|x+3| + C =$
$\ln(|x-3|^3(x+3)^2) + C$

(Kontroller integrasjoner ved å derivere svaret og se om du kommer tilbake til utgangspunktet.)

c)

Sirkelligning: $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$
Øverste halvdel av sirkelen er funksjonen $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ er arealet avgrenset av øverste halvdelen av sirkelen og x-aksen, altså halvparten av sirkelarealet; $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$

d)

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
Lag figur med to vektorer som står normalt på hverandre.
Bør også nevne at hvis en eller begge vektorene er $\vec{0}$,

er også ligningen oppfyllt.
(Null-vektorer "har alle retninger".)

2) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
Lag figur med to parallelle vektorer.
(Også her kan en eller begge være null-vektorer.)

e)

$\overrightarrow{AB} = [1,-2,4], \qquad \overrightarrow{AC} = [2,1,3]$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = [-10,5,5]$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$:
$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = [-10,5,5] \cdot [1,-2,4] = -10 - 10 + 20 = 0$
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$:
$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC} = [-10,5,5] \cdot [2,1,3] = -20 + 5 + 15 = 0$

f)

$n = 1$:
$VS = 1, \qquad HS = \frac{4^1-1}{3} = 1 \qquad OK$

$n \to n+1$:
Må vise at $S_{n+1} = \frac{4^{n+1}-1}{3} = \frac{4 \cdot 4^n - 1}{3}$

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{4^n-1}{3} + 4^n = \frac{4^n-1+3\cdot 4^n}{3} = \frac{4\cdot 4^n-1}{3} \qquad OK$

Oppgave 2

a) Kan løses med integrerende faktor eller separasjon.
Separasjon gir: $\frac{y'}{5+2y} = 1$ og vi har: $\int \frac{y'}{5+2y} dx = \int 1 dx$
Variabelskifte (kjerneregel) gir:
$\int \frac{1}{5+2y} dy = \int 1 dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln|5+2y| = x + C_1 \Leftrightarrow \ln|5+2y| = 2x + C_2 \Leftrightarrow$
$|5+2y| = e^{2x+C_2} \Leftrightarrow 5 + 2y = C_3 e^{2x} \Leftrightarrow$
$y = Ce^{2x} - \frac{5}{2}$ (Generell løsning.)

b)
1) $y(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = Ce^0 - \frac{5}{2} \Leftrightarrow C = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$

$y = \frac{9}{2}e^{2x} - \frac{5}{2}$ (Spesiell løsning.)

2) $y = \frac{49}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{2}e^{2x} - \frac{5}{2} = \frac{49}{2} \Leftrightarrow e^{2x} = 6 \Leftrightarrow 2x = \ln 6 \Leftrightarrow$
$x = \frac{\ln 6}{2} \approx 0.90$

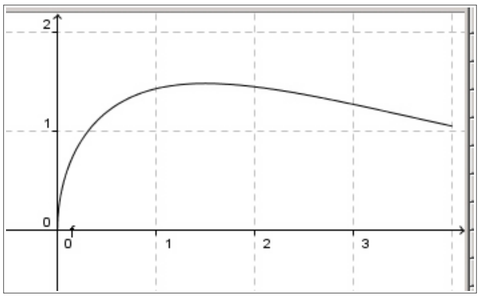
c) $y'(0) = 5 + 2y(0) = 5 + 2 \cdot 2 = 9$
Ett-punktsformel: $y - 2 = 9(x - 0) \Leftrightarrow y = 9x + 2$

Pass på å bruke $y' = 5 + 2y$ her, istedenfor å derivere $y = \frac{9}{2}e^{2x} - \frac{5}{2}$!
(Kan eventuelt derivere på kladd for å kontrollere at ting stemmer.)

Del 2 - Med hjelpemidler

Oppgave 3

a) Ggb: **f(x)=Funksjon[2*sqrt(x)*e ^(-x/3),0,4]**



Produktregel gir:
$f'(x) = 2\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{x}{3}} + 2\sqrt{x}\,e^{-\frac{x}{3}}(-\frac{1}{3}) = e^{-\frac{x}{3}}(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{3})$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$r = f(\frac{3}{2}) = 2\sqrt{\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{3}{2e}} = \sqrt{\frac{6}{e}} = 1.4857 \approx 1.486$
Maks. diameter: $2r \approx 2.97$

b)
$V = \pi\int_0^4 f^2(x)dx = 4\pi\int_0^4 xe^{-\frac{2x}{3}}dx$

Delvis integrasjon:
$\int xe^{-\frac{2x}{3}}dx = x\frac{1}{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{2x}{3}} - \int\frac{1}{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{2x}{3}}dx = -\frac{3x}{2}e^{-\frac{2x}{3}} + \frac{3}{2}\int e^{-\frac{2x}{3}}dx =$
$-\frac{3x}{2}e^{-\frac{2x}{3}} + \frac{3}{2}\frac{1}{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{2x}{3}} + C = -\frac{3x}{2}e^{-\frac{2x}{3}} - \frac{9}{4}e^{-\frac{2x}{3}} + C =$
$-\frac{3}{4}e^{-\frac{2x}{3}}(2x + 3) + C$

$V = 4\pi\ {}_0^4[-\frac{3}{4}e^{-\frac{2x}{3}}(2x + 3)] = \pi\ {}_0^4[-3e^{-\frac{2x}{3}}(2x + 3)] =$
$\pi(-3e^{-\frac{8}{3}}11 - (-3e^0 3)) = \pi(9 - 33e^{-\frac{8}{3}}) =$
$3\pi(3 - 11e^{-\frac{8}{3}}) \approx 21.1$

Sjekk av svar:
GGB: integral[pi*f(x) ^2,0,4]
LR: fnInt(πY1 ^2,X,0,4)

Oppgave 4

a)
1)
Likeformede trekanter og forholdstall gir oss at:

$A_1B_1 = \frac{AB}{2}, A_2B_2 = \frac{A_1B_1}{2}, A_3B_3 = \frac{A_2B_2}{2}, \ldots$

Arealene blir, med $AB = a$ og $BC = b$:

$a_1 = A_{ABB_1A_1} = (AB + A_1B_1)\frac{\frac{BC}{2}}{2} = (a + \frac{a}{2})\frac{\frac{b}{2}}{2} = \frac{3}{8}ab$

$a_2 = A_{A_1B_1B_2A_2} = (\frac{a}{2} + \frac{a}{4})\frac{\frac{b}{4}}{2} = \frac{3}{32}ab$

$\ldots$

$a_n = A_{A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n} = (\frac{a}{2^{n-1}} + \frac{a}{2^n})\frac{\frac{b}{2^n}}{2} = (\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n})\frac{1}{2^{n+1}}ab =$
$(\frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^n})\frac{1}{2^{n+1}}ab = \frac{3}{2^{2n+1}}ab$

Utregnet med $AB = a = 8$ og $BC = b = 16$:

$a_1 = \frac{3}{8}8 \cdot 16 = 48$

$a_2 = \frac{3}{32}8 \cdot 16 = 12$

$a_3 = \frac{3}{128}8 \cdot 16 = 3$

$\ldots$

$a_n = \frac{3}{2^{2n+1}}8 \cdot 16 = \frac{384}{2^{2n+1}}$

2) Geometrisk rekke med $a_1 = 48$ og kvotient $k = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$-1 < k < 1$: Rekken konvergerer.

b)

$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{48}{1-\frac{1}{4}} = 64$

Geometrisk må den uendelige summen til slutt fylle ut hele trekanten ABC, så:

$S = A_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{8 \cdot 16}{2} = 64$

Oppgave 5

a) Linje l gjennom $(5,3,4)$ med retningsvektor $\vec{r_l} = [-2,1,2]$

Skjæring xy-plan, A: $z = 0 \Leftrightarrow 0 = 4 + 2t \Leftrightarrow t = -2$

$x = 5 - 2(-2) = 9, \quad y = 3 - 2 = 1$

$A = (9,1,0)$

Skjæring xz-plan, B: $y = 0 \Leftrightarrow 0 = 3 + t \Leftrightarrow t = -3$

$x = 5 - 2(-3) = 11, \quad z = 4 + 2(-3) = -2$

$B = (11,0,-2)$

Avstand: $|\overrightarrow{AB}| = |[2,-1,-2]| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$

Kunne regnet ut avstanden direkte uten å regne ut punktene,
"tidsdifferansen" er $\Delta t = -2 - (-3) = 1$

Beveger seg i dette intervallet *en* retningsvektor, så avstanden
blir $|\vec{r_l}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$

b)
Regningsvektor for m: $\vec{r_m} = [1, -1, 1]$

Nokså åpenbart at $\vec{r_m}$ ikke er parallell med $\vec{r_l}$, men kan sjekke med
vektorprodukt: $\vec{r_l} \times \vec{r_m} = [-2, 1, 2] \times [1, -1, 1] = [3, 4, 1]$
Da vektorproduktet ikke er $\vec{0}$ er ikke retningsvektorene (eller linjene)
parallelle. (Vektorproduktet har en lengde som lik arealet
av utspendt parallellogram og dette arealet er null hvis vektorene er
parallelle.)

c) $\overrightarrow{PQ} = [x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P] =$
$[s - (5 - 2t), 1 - s - (3 + t), 1 + s - (4 + 2t)] =$
$[s + 2t - 5, -s - t - 2, s - 2t - 3]$ *QED*

d) $\overrightarrow{PQ} \perp l \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{r_l} = 0 \Leftrightarrow$
$[s + 2t - 5, -s - t - 2, s - 2t - 3] \cdot [-2, 1, 2] = 0 \Leftrightarrow$
$s + 9t = 2$ *I*

$\overrightarrow{PQ} \perp m \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{r_m} = 0 \Leftrightarrow$
$[s + 2t - 5, -s - t - 2, s - 2t - 3] \cdot [1, -1, 1] = 0 \Leftrightarrow$
$3s + t = 6$ *II*

Løser *I* og *II*: $s = 2, t = 0$

I dette tilfelle har vi:
$P = (5 - 2 \cdot 0, 3 + 0, 4 + 2 \cdot 0) = (5, 3, 4)$
$Q = (2, 1 - 2, 1 + 2) = (2, -1, 3)$
og
$\overrightarrow{PQ} = [-3, -4, -1]$
(Egentlig bare $\overrightarrow{PQ}$ vi trenger, så uklart hvorfor vi skal gå veien om
P og Q ...)

e) Når $\overrightarrow{PQ} = [-3, -4, -1]$ står normalt på begge linjene er avstanden lik
lengden av $\overrightarrow{PQ}$: $a = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{26} \approx 5.10$

c), d) og e) viser den *klønete* og *tungvindte* måten å regne ut denne avstanden på.
I praksis bruker vi formelen som gir avstanden som projeksjonen av en vilkårlig
vektor $\overrightarrow{PQ}$ på normalvektoren som vi lager som vektorprodukt av retningsvektorene:

$$a = \left| \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{r_l} \times \vec{r_m})}{|\vec{r_l} \times \vec{r_m}|} \right|$$

Velger $t = 0$ og får et punkt $P = (5, 3, 4)$.
Velger $m = 0$ og får et punkt $Q = (0, 1, 1)$.
Da har vi en $\overrightarrow{PQ} = [-5, -2, -3]$

$\vec{r_l} \times \vec{r_m} = [-2,1,2] \times [1,-1,1] = [3,4,1]$

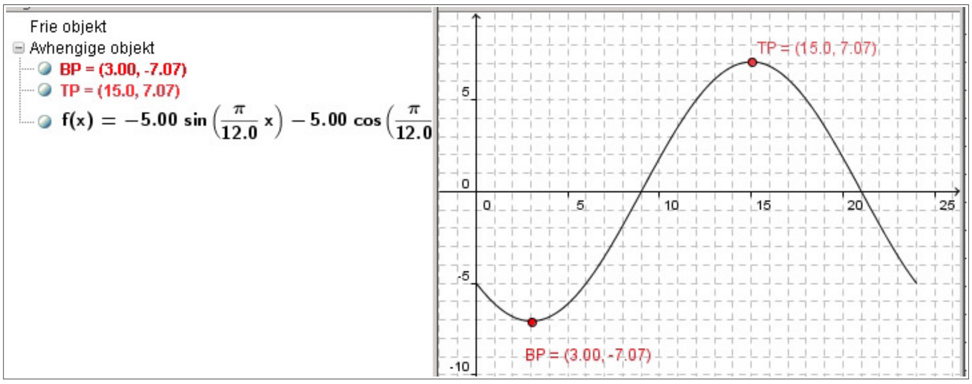
Avstand: $a = \left| \frac{[-5,-2,-3]\cdot[3,4,1]}{\sqrt{3^2+4^2+1^2}} \right| = \left| \frac{-15-8-3}{\sqrt{26}} \right| = \left| \frac{-26}{\sqrt{26}} \right| = \frac{26}{\sqrt{26}} = \sqrt{26}$

Kan bruke denne metoden for å kontrollere svaret.

Oppgave 6

Igjen en oppgave som bruker derivasjon for å finne ekstremalpunkter på en sinus-funksjon. Bedre å gjøre om til $a\sin(bx+c)+d$ og finne ekstremalpunkter direkte uten derivasjon, men vi må jo gjøre som de ber om...
Helt idiotisk blir det jo i b) , der ville det også være naturlig å gjøre denne omformingen med den deriverte...

a) Ggb: **f(x)=Funksjon[-5 sin(pi/12*x)-5 cos(pi/12*x),0,24]**



Avlest:

Amplitude: 7, periode: 24

b) Står ikke "ved regning", så mulig å spare tid ved å få feks. GeoGebra til å derivere funksjonen for oss og tegne fortegnslinjer direkte ut fra det grafiske bildet av den deriverte?

$$f'(x) = -5\cos(\tfrac{\pi}{12}x)\tfrac{\pi}{12} - 5(-\sin(\tfrac{\pi}{12}x))\tfrac{\pi}{12} =$$
$$\tfrac{5\pi}{12}\sin(\tfrac{\pi}{12}x) - \tfrac{5\pi}{12}\cos(\tfrac{\pi}{12}x)$$

For å tegne fortegnslinjer må vi løse $f'(x) = 0$, enten ved å omforme til $a\sin(bx+c)+d$ eller ved å dividere med cos slik at vi får:
$\tan(\frac{\pi}{12}x) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = 3 + k12$
Testing av verdier mellom i intervaller avgrenset av 3 og 15 gir fortegnslinjer: (Eller mener man å bruke grafen? Hva er da vitsen med å tegne fortegnslinjer, da kan man jo lese av ekstremalpunktene like lett som fortegnslinjene?)

```
             3                        15
f'(x) :  - - -o————————————————————————o- - - -
```

BP :

$(3, f(3)) = (3, -5\sqrt{2})$
$(24, f(24)) = (24, -5)$ (Endepunkt)

TP :

$(15, f(15)) = (15, 5\sqrt{2})$
$(0, f(0)) = (0, -5)$ (Endepunkt)

c) $g(x) = 22 + f(x)$, altså $f(x)$ flyttet 22 oppover.

Høyeste temp: $22 + 5\sqrt{2} \approx 29.1$ [°C], 15 timer etter midnatt. (15:00)
Laveste temp: $22 - 5\sqrt{2} \approx 14.9$ [°C], 3 timer etter midnatt. (03:00)

En mer naturlig måte å løse denne oppgaven på, hvis ikke oppgaven hadde bedt oss om å gjøre det på den tungvindte måten:
$f(x) = \sqrt{5^2 + 5^2}\,\sin(\frac{\pi}{12}x + \varphi)$, der $\tan\varphi = -1, \varphi \in 3Kv$
Dette gir $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ (eller eventuelt $\frac{5\pi}{4}$)
$$f(x) = 5\sqrt{2}\,\sin(\tfrac{\pi}{12}x - \tfrac{3\pi}{4}) = 5\sqrt{2}\,\sin(\tfrac{\pi}{12}(x-8))$$
Altså amplitude $5\sqrt{2} \approx 7.07$, likevektslinje 0
Periode: $\frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow T = 24$
Faseforskyving: 8 mot høyre (eller 16 mot venstre)

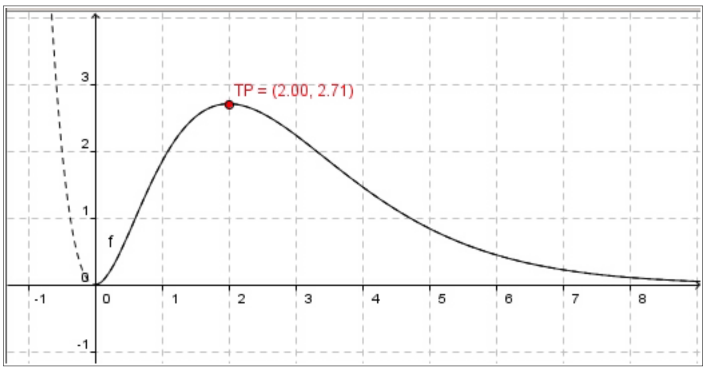
Maksverdi: $f_{\max} = 5\sqrt{2}$ når $\frac{\pi}{12}x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow$
$x = 15 + k24$): $x = 15$
Minverdi: $f_{\min} = -5\sqrt{2}$ når $\frac{\pi}{12}x - \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow$
$x = 27 + k24$): $x = 3$

Kan gjøre dette på kladd for å kontrollere svarene.

Kan også gjøre alt i GeoGebra, da det ikke står at det skal gjøres ved regning...

Oppgave 7

a)



b)
1) Produktregel:
$f'(x) = 10xe^{-x} + 5x^2e^{-x}(-1) = 5x(2-x)e^{-x}$
eller $5(2x - x^2)e^{-x}$ *QED*

2) Definisjonsområde: $\langle 0, \infty \rangle$
e^{-x} ————————————
x <————————————
$2-x$ <————o- - - - - - - - - -
$f'(x)$ <————o- - - - - - - - - -

$f(x)$ voksende for $x \in \langle 0, 2\rangle$
$f(x)$ avtagende for $x \in \langle 2, \rightarrow\rangle$ $\quad$ ($\langle \leftarrow, 0\rangle$ ikke med i definisjonsområdet.)

$TP = (2, f(2)) = (2, \frac{20}{e^2}) \approx (2.00, 2.71)$

(Bunnpunktet $BP = (0, f(0)) = (0, 0)$ ikke med i definisjonsområdet.)

c) Vi bruker: $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

$F(x) = -5x^2e^{-x} - 10xe^{-x} - 10e^{-x} + C =$
$(-5x^2 - 10x - 10)e^{-x} + C$

Produktregel:
$F'(x) = (-10x - 10)e^{-x} + (-5x^2 - 10x - 10)e^{-x}(-1) =$
$(-10x - 10 + 5x^2 + 10x + 10)e^{-x} = 5x^2e^{-x} = f(x)$ *QED*

d)
$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a 5x^2e^{-x}dx =_0^a [(-5x^2 - 10x - 10)e^{-x}] =$
$(-5a^2 - 10a - 10)e^{-a} - (-10e^0) =$
$(-5a^2 - 10a - 10)e^{-a} + 10$

$\lim_{a\to\infty} \int_0^a f(x)dx = \lim_{a\to\infty}((-5a^2 - 10a - 10)e^{-a} + 10) =$
$-5\lim_{a\to\infty} a^2e^{-a} - 10\lim_{a\to\infty} ae^{-a} - 10\lim_{a\to\infty} e^{-a} + 10 =$
$-5 \cdot 0 - 10 \cdot 0 - 10 \cdot 0 + 10 = 10$

(Kan teste svaret ved å gjøre:
Ggb: integral[f,0,100]
LR: fnInt(Y1,X,0,100)
og se om det blir ca. 10. (Konvergerer ganske raskt.))