4.1 - Derivasjon av trigonometriske funksjoner

Formell utregning av den deriverte av $\sin x,\ \cos x$ og $\tan x$.

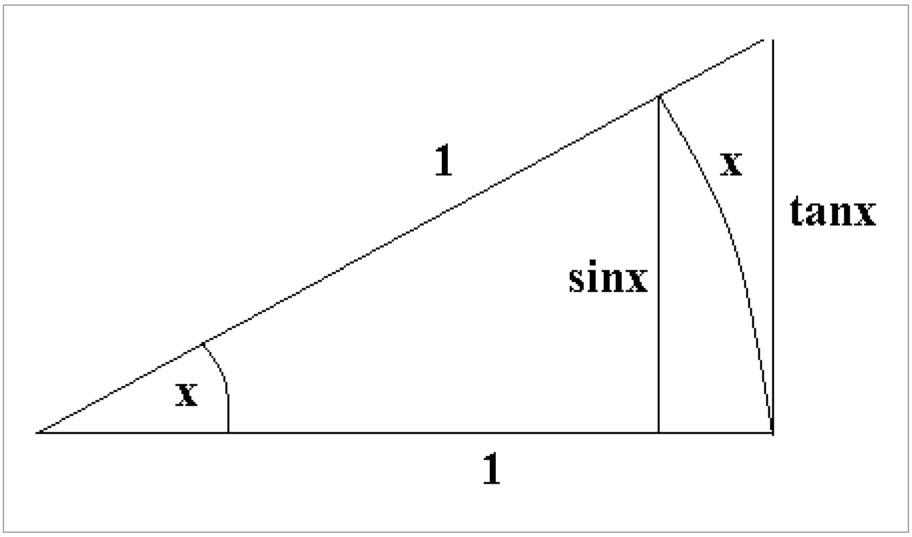
To viktige grenseverdier

Vi trenger to grenseverdier og må derfor vise at:

$I)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$II)\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

$I)$ Se på figuren:



Størrelser:

- Vinkel: x
- Lengste katet ytterste rettvinklede trekant: 1
- Korteste katet ytterste rettvinklede trekant: $\tan x$
- Hypotenus innerste trekant: 1
- Bue:x (fordi vinkel er definert som $x = \frac{bue}{radius} = \frac{x}{1}$

Lengden av buen ligger mellom de loddrette katetene i de to rettvinklede trekantene:

$$\sin x < x < \tan x \Leftrightarrow \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \sin x < x \wedge x < \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin x}{x} < 1 \wedge \cos x < \frac{\sin x}{x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Når $x \to 0$ vil $\cos x \to 1$ og vi får som grensetilfelle: $1 < \frac{\sin x}{x} < 1$

$\frac{\sin x}{x}$ må derfor bli 1 som grensetilfelle og vi har $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ *QED*.

$II)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sin^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} =$$
$$\lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{\cos x + 1} = -1 \bullet \frac{0}{2} = 0 \qquad QED$$

Den deriverte av $\sin x$:

Da er vi klar for å derivere $\sin x$:

$$\sin x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin(x)}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sin x \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} =$$
$$\sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x \qquad QED$$

Den deriverte av $\cos x$:

Kan gjøre som under derivasjonen av $\sin x$, men det er enklere å omforme til sinus og bruke det vi allerede har vist:

$$\cos x' = \sin(\frac{\pi}{2} - x)' = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) = \sin x \cdot (-1) = -\sin x \qquad QED$$

(Bruker kjerneregel på $\sin(\frac{\pi}{2} - x)'$)

Den deriverte av $\tan x$:

$$\tan x' = \frac{\sin x}{\cos x}' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}$$ (Brøkregel for derivasjon)

To muligheter videre:

$\tan x' = \tan^2 x + 1$ (Dividerer ut brøken)

$\tan x' = \frac{1}{\cos^2 x}$ (Bruker $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)