R2 - Kapittel 5 - Integraler

18.03.09

I

Finn integralene:

a) $\int (x+\frac{4}{x^3})dx$ b) $\int \frac{3}{\sqrt{x}}dx$ c) $\int e^{-2x}dx$

d) $\int x^5 \ln x\, dx$ e) $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ f) $\int \frac{1}{e^x(1-e^{-x})^3}dx$

a) $\int x+\frac{4}{x^3}dx = \int (x+4x^{-3})dx = \frac{1}{2}x^2 + 4\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{x^2} + C$

b) $\int \frac{3}{\sqrt{x}}dx = 3\int x^{-\frac{1}{2}}dx = 3\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 6\sqrt{x} + C$

c) Variabelskifte: $u = -2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2 \Leftrightarrow dx = \frac{du}{-2}$
$\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^u + C = C - \frac{1}{2}e^{-2x}$

d) Delvis: $\int x^5 \ln x\, dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \int \frac{x^6}{6}\frac{1}{x}dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{1}{6}\int x^5 dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{x^6}{36} + C$

e) Variabelskifte: $u = x^3+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{1}{3x^2}du$
$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int x^2\sqrt{u}\,\frac{1}{3x^2}du = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}(\sqrt{x^3+1})^3 + C$

f) $I = \int \frac{1}{e^x(1-e^{-x})^3}dx = \int \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^3}dx$
Variabelskifte: $u = 1-e^{-x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^{-x} \Leftrightarrow dx = \frac{du}{e^{-x}} = e^{-x}du$
$I = \int \frac{e^{-x}}{u^3}\frac{1}{e^{-x}}du = \int u^{-3}du = \frac{u^{-3+1}}{-3+1} + C = C - \frac{1}{2}u^{-2} = C - \frac{1}{2}\frac{1}{(1-e^{-x})^2}$

II

Gitt funksjonen $F(x) = \ln(\tan x)$.

a) Vis at $F'(x) = \frac{1}{\sin x\cos x}$
b) Finn det bestemte integralet: $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x\cos x}dx$.

a) $F(x) = \ln u,\quad u = \tan x$
$F'(x) = \frac{1}{u}\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\tan x\cos^2 x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x\cos x}$

b) $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x\cos x}dx = _{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}[\ln(\tan x)] = \ln(\tan\frac{\pi}{3}) - \ln(\tan\frac{\pi}{4}) =$
$\ln\sqrt{3} - \ln 1 = \ln\sqrt{3} = \frac{\ln 3}{2} \approx 0.549$

III

a) Finn arealet avgrenset av grafen til $f(x) = x^2 - 1$ og x –aksen.

b) Finn arealet avgrenset av $f(x)$ (i a)) og $g(x) = 2 - 2x$.

a) $f(x)$ skjærer x –aksen i $a = -1$ og $b = 1$.
Areal$_a = \left|\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx\right| = \left|{}_{-1}^{1}\left[\frac{x^3}{3}-x\right]\right| = \left|\frac{1}{3}-1-(-\frac{1}{3}-(-1))\right| =$
$\left|\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}-1\right| = \left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3} \approx 1.33$

b) $f(x)$ og $g(x)$ skjærer hverandre når: $x^2-1 = 2-2x \Leftrightarrow x^2+2x-3 = 0 \Leftrightarrow$
$x = -3 \vee x = 1$
Avgrenset areal: (Tegn figur!!!)
$\int_{-3}^{1} g(x) - \int_{-3}^{-1} f(x)dx +$Areal$_a =$
$\int_{-3}^{1}(2-2x)dx - \int_{-3}^{-1}(x^2-1)dx + \frac{4}{3} = {}_{-3}^{1}\left[2x-x^2\right] - {}_{-3}^{-1}\left[\frac{x^3}{3}-x\right] + \frac{4}{3} =$
$2-1-(-6-9)-(-\frac{1}{3}-(-1)-(-\frac{27}{3}-(-3))) + \frac{4}{3} = \frac{32}{3} \approx 10.7$

IV

Vi har en trekantet pyramide med grunnflate G og høyde H.
Vi legger pyramiden i et 3-dimensjonalt koordinatsystem med toppunktet i Origo og slik at alle punkter i grunnflaten ligger i planet $x = 1$.
Vi kaller arealet av en snittflate med x –koordinat x for $A(x)$.
a) Forklar hvorfor $\frac{A(x)}{G} = \frac{x^2}{H^2}$.
b) Bruk a) til å bevise at volumet av pyramiden er $V = \frac{GH}{3}$.

a) Forholdet mellom arealene er kvadratet av det lineære forholdet: $\frac{A(x)}{G} = (\frac{x}{H})^2 = \frac{x^2}{H^2}$.

b) $A(x) = \frac{G}{H^2}x^2$ gir: $V = \int_0^H A(x)dx = \frac{G}{H^2}\int_0^H x^2dx = \frac{G}{H^2}\,{}_0^H\left[\frac{x^3}{3}\right] = \frac{G}{H^2}\frac{H^3}{3} = \frac{GH}{3}$

V

I neste kapittel skal vi lære om såkalte differensialligninger.
Et eksempel på en slik er: $xy' + y = x^2$
Dette er en ligning hvor både funksjonen y, dens deriverte y' og den uavhengige variabelen x inngår.
Å løse denne ligningen vil si å finne en funksjon $y = f(x)$ som passer i ligningen.

Vi skriver differensialligningen slik: $y' \cdot x + y \cdot 1 = x^2$.

a) Forklar hvorfor $y \cdot x = \frac{x^3}{3} + C$.

b) Løsningen av differensialligningen er derfor: $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$
Prøv å løse differensialligningen: $xy' - y = x^2$

a) Produktregelen gir: $(yx)' = y'x + y1 = xy' + y$
Da kan vi skrive $(yx)' = x^2$ og får ved integrasjon: $yx = \int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C$
Løsningen blir derfor $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$ etter divisjon med x.

b) Hvis vi dividerer med x^2 på begge sider (må forutsette $x \neq 0$), får vi: $\frac{y'x-y1}{x^2} = 1$
Brøkregel gir oss da: $(\frac{y}{x})' = 1 \Rightarrow \frac{y}{x} = \int 1dx = x + C$
Altså har vi løsningen: $y = x(x+C) = x^2 + Cx$

Formler:

Definisjon av ubestemt integral: $F(x) = \int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Definisjon av bestemt integral (rektangler):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x, \qquad \text{der} \qquad x_i = a + (i-1)\Delta x, \qquad \Delta x = \tfrac{b-a}{n}$$

Utregning i praksis: Fundamentalteoremet i analysen (funksjonslæren):

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a) \qquad \text{der} \qquad F'(x) = f(x)$$

Areal under kurve avgrenset av x-aksen, $f(x)$, $x = a$ og $x = b$: $\quad A = \int_a^b f(x)\,dx$

Volum: $\quad V = \int_a^b A(x)\,dx, \quad$ der $A(x)$ er formelen for arealet av en snittflate i romlegemet normalt på x-aksen.

Spesialtilfelle: Omdreiningslegeme: $\quad A(x) = \pi(f(x))^2$ som gir: $V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$

Ubestemte integraler:

(Alle skal selvfølgelig i tillegg ha: "+C"!)

$f(x)$	$\int f(x)dx$
k	kx
x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}, r \neq -1$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\ln x$	$x\ln x - x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$\frac{a}{x-b}$	$a\ln\lvert x-b\rvert$
$\tan^2 x$	$\tan x - x$
$\cos^2 x$	$\int(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2})dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$
$\sin^2 x$	$\int(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2})dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$
	...

Generelle formler og metoder:

$$\int(af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$
$$\int f(kx)\,dx = \tfrac{1}{k}F(kx) + C, \qquad \text{der } F'(u) = f(u)$$

Delvis integrasjon: $\quad \int u'v = uv - uv'$

Variabelskifte: $\quad \int f(u)u'(x)dx = \int f(u)du, \quad$ der $du = u'(x)dx$

Delbrøk: $\quad \frac{a}{(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-b} + \frac{B}{x-c}$

(A og B finnes ved å løse ligningssystem.)