R2 - Eksamen H09

Løsningsskisser

Si ifra hvis dere finner feil!

Del 1

Oppgave 1

a)
Produktregel: $f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x = x(2\sin x + x\cos x)$

b)
Vinkel er da definert som $\frac{buelengde}{radius}$ i en sirkel med vinkelens toppunkt i sentrum og buelengden og radiusen er lengdene på vinkelbenene som defineres av skjæringspunktene mellom vinkelbenene og sirkelen.

v [rad]= $\frac{\frac{omkrets \cdot v\,[^\circ]}{360^\circ}}{r} = \frac{2\pi r \cdot v\,[^\circ]}{r360^\circ} = 2\pi\frac{v\,[^\circ]}{360^\circ}$ (Kakestykke-tenkning)
eller omvendt:
$v\,[^\circ]= 360^\circ\frac{v\,[\text{rad}]}{2\pi}$ (Eventuelt: $180^\circ\frac{v\,[\text{rad}]}{\pi}$)

c)
$y' + 2y = 3x, \quad y(0) = 3$
Ikke separabel, bruker integrerende faktor $IF = e^{\int 2dx} = e^{2x}$

$y'e^{2x} + ye^{2x}2 = 3xe^{2x}$
$(ye^{2x})' = 3xe^{2x}$
$ye^{2x} = 3\int xe^{2x}dx = 3(x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx) = 3(x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{2} + C_1) = \frac{3}{4}e^{2x}(2x-1) + C_2$

$y = \frac{3}{4}(2x-1) + Ce^{-2x}$ (Generell løsning.)

$y(0) = 3 \Leftrightarrow 3 = \frac{3}{4}(2\cdot 0 - 1) + Ce^0 \Leftrightarrow C = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$

$y = \frac{3}{4}(2x-1) + \frac{15}{4}e^{-2x}$

d)
1)
Direkte faktorisering:
$f(x) = x^3 - 4x - (x^2-4) = x(x^2-4) - (x^2-4) = (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x+2)(x-2)$

Eller: $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4)$ med polynomdivisjon
og videre: $(x-1)(x-2)(x+2)$

2)
Delbrøkoppspaltning: $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-1)(x-2)+B(x+2)(x-2)+C(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-2)} =$

$$\frac{(A+B+C)x^2+(-3A+C)x+(2A-4B-2C}{(x+2)(x-1)(x-2)}$$

Sammenligning med opprinnelig uttrykk gir ligningssystemet:
$I \qquad A+B+C=1$
$II \qquad -3A \qquad +C=-2$
$III \qquad 2A-4B-2C=4$

II: $\quad C=3A-2$
Innsatt i I og III :

$IV \qquad 4A+B=3$
$V \qquad 4A+4B=0$

$V-IV$: $\qquad 3B=-3 \Leftrightarrow B=-1$
Innsatt i V : $4A+4(-1)=0 \Leftrightarrow A=1$

Innsatt i II : $\qquad C=3\cdot 1-2=1$

Så vi har: $\qquad \frac{x^2-2x+4}{x^3-x^2-4x+4}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$

3)
$\int \frac{x^2-2x+4}{x^3-x^2-4x+4}dx=\int \frac{1}{x+2}dx-\int \frac{1}{x-1}dx+\int \frac{1}{x-2}dx=$
$\ln|x+2|-\ln|x-1|+\ln|x-2|+C$

(Eventuelt: $\quad C\ln\left|\frac{(x+2)(x-2)}{x-1}\right|$)

e)
Geometrisk: $\quad k=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2} \Leftrightarrow$
$\frac{2x}{x-1}=\frac{4x+8}{2x}, x\neq 0 \wedge x\neq 1 \Leftrightarrow$
$4x^2=(x-1)(4x+8) \Leftrightarrow$
$4x^2=4x^2+4x-8 \Leftrightarrow 4x-8=0 \Leftrightarrow x=2$

$(k=4)$

f)
$n=1$: $\qquad S_1=a_1\frac{k^1-1}{k-1}=a_1 \qquad OK$

$n\rightarrow n+1$:

$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}=a_1\frac{k^n-1}{k-1}+a_1k^n=\frac{a_1}{k-1}(k^n-1+k^n(k-1))=$
$\frac{a_1}{k-1}(k^n-1+k^{n+1}-k^n)=\frac{a_1}{k-1}(k^{n+1}-1) \qquad QED$

Oppgave 2

a)
$\overrightarrow{AB}=[2,1,2] \qquad \overrightarrow{AC}=[1,6,4]$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=[2,1,2]\cdot[1,6,4]=2+6+8=16$

b)

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = [-8,-6,11]$$

c)

Bruker normalvektor $\vec{n} = -\vec{AB}\times\vec{AC} = [8,6,-11]$

$\vec{AP}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x-1,y-1,z-1]\cdot[8,6,-11] = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha: \quad 8x+6y-11z-3 = 0$

$D = (2,2,3)$ i planet:

Innsatt i ligning: $\quad VS = 8\cdot 2+6\cdot 2-11\cdot 3-3 = -8$

$VS \neq HS$: $\quad D$ ikke i planet.

d)
Retningsvektor: $\quad \vec{r_l} = \vec{n} = [8,6,-11]$

$[x,y,z] = \vec{OD}+t\vec{r_l} \Leftrightarrow [x,y,z] = [2,2,3]+t[8,6,-11] \Leftrightarrow$

$$l: \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2+8t \\ y = 2+6t \\ z = 3-11t \end{array} \right\}$$

$l\cap\alpha$: $\quad 8(2+8t)+6(2+6t)-11(3-11t)-3 = 0 \Leftrightarrow$
$16+64t+12+36t-33+121t-3 = 0 \Leftrightarrow$
$221t-8 = 0 \Leftrightarrow$
$t = \frac{8}{221}$

$S = (2+8\cdot\frac{8}{221}, 2+6\cdot\frac{8}{221}, 3-11\cdot\frac{8}{221}) =$
$(\frac{506}{221}, \frac{490}{221}, \frac{575}{221}) \approx (2.29, 2.22, 2.60)$

Del 2

Oppgave 3

a)
Trekant med sider a,b,c er likeformet med trekant med sider $h,?,b$.
Forholdstall gir: $\quad \frac{a}{h} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow ab = ch \quad QED$

Største trekant: $\quad a^2+b^2 = c^2$

Forholdet: $c = \frac{ab}{h}$
Setter c inn i første ligning: $a^2 + b^2 = \frac{a^2b^2}{h^2}$
Divisjon med a^2b^2 gir: $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{h^2}$ *QED*

b)
$\vec{AB} \times \vec{AC} = [-a, b, 0] \times [-a, 0, c] = [bc, ac, ab]$

$$F_{ABC} = \frac{\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}{2}$$

c)
Tilsvarende regning på de andre sideflatene gir:

$$F_{OAC} = \frac{\left|\vec{OA} \times \vec{OC}\right|}{2} = \left|\frac{[a,0,0] \times [0,0,c]}{2}\right| = \frac{ac}{2}$$

$$F_{OBC} = \frac{\left|\vec{OB} \times \vec{OC}\right|}{2} = \left|\frac{[0,b,0] \times [0,0,c]}{2}\right| = \frac{bc}{2}$$

$$F_{OAB} = \frac{\left|\vec{OA} \times \vec{OB}\right|}{2} = \left|\frac{[a,0,0] \times [0,b,0]}{2}\right| = \frac{ab}{2}$$

Kontroll av setningen:
$VS = \left(\frac{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}{2}\right)^2 = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{4}$
$HS = \left(\frac{ac}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2}\right)^2 = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{4}$
QED

d)
$$V_{OABC} = \frac{Gh}{3} = \frac{\frac{ab}{2}c}{3} = \frac{1}{6}abc$$

Men også:
$$V_{OABC} = \frac{ABCh}{3} = \frac{\frac{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}{2}h}{3}$$

Vi får ligningen: $\frac{1}{6}abc = \frac{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}{6}h \Leftrightarrow \frac{1}{h} = \frac{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}{abc}$

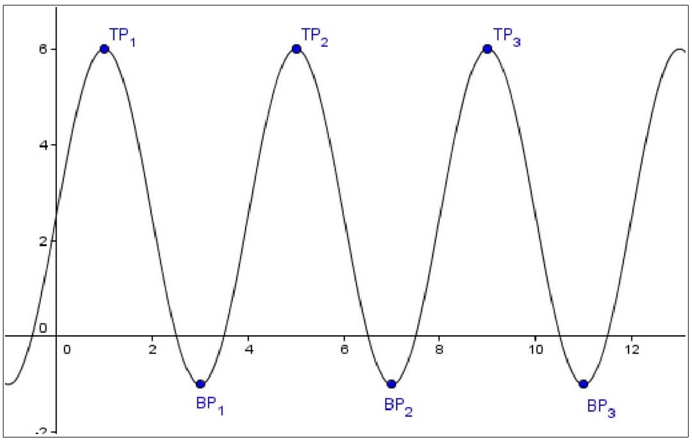
Kvadrering gir: $\frac{1}{h^2} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow$
$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ *QED*

Oppgave 4 - Alternativ I

a)
Avstanden mellom $(1, 6)$ og $(3, -1)$ blir 2 og må være en halv periode, så:

$$T = 2 \cdot 2 = 4$$

Går vi hele og halve perioder bortover får vi:



TP : $(1,6),(5,6),(9,6)$
og
BP : $(3,-1),(7,-1),(11,-1)$

Likevektslinje: $d = \frac{\max+\min}{2} = \frac{6+(-1)}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$

Amplitude: $a = \frac{\max-\min}{2} = \frac{6-(-1)}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$

$c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Topp-punktet $TP\_1 = (1,6)$ er faseforskjøvet $\phi = 1$ til høyre.

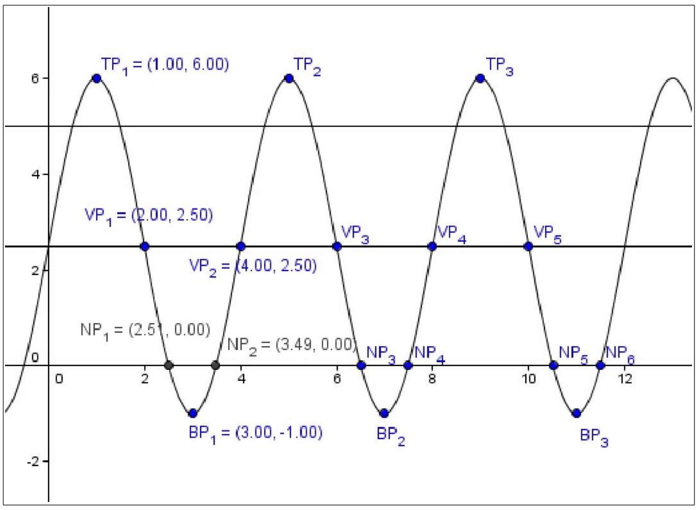
): $f(x) = 3.5\cos(\frac{\pi}{2}(x-1)) + 2.5 = 3.5\cos(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}) + 2.5$

b)
Avtar raskest i vendepunkter, som ligger midt mellom topp- og bunnpunkter, altså for $x = 2, x = 6$ og $x = 10$.

c)
$3.5\cos(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}) + 2.5 = 0 \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}) = -0.71429 \Leftrightarrow$
$\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} = 2.37 + k2\pi \vee \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} = 2\pi - 2.37 + l2\pi \Leftrightarrow$
$x = 2.51 + k4 \vee x = 3.49 + l4$

NP : $(2.51,0),(3.49,0),(6.51,0),(7.49,0),(10.51,0),(11.49,0)$

d)



Ser vi på grafen ser vi at arealene avgrenset av $f(x)$ og x –aksen er like store som de søkte arealene. Ved å regne ut disse arealene slipper vi å finne skjæringen mellom linjen $y = 5$ og $f(x)$:

$$\int_{2.51}^{3.49} (3.5\cos(\tfrac{\pi}{2}(x-1)) + 2.5)dx =$$

$$\left[3.5\frac{\sin(\frac{\pi}{2}(x-1))}{\frac{\pi}{2}} + 2.5x\right]_{2.51}^{3.49} =$$
$$\tfrac{7}{\pi}\sin(\tfrac{\pi}{2}(3.49-1)) + 2.5\cdot 3.49 - (\tfrac{7}{\pi}\sin(\tfrac{\pi}{2}(2.51-1)) + 2.5\cdot 2.51) \approx -0.651$$

Et areal er altså 0.6512

Samlet areal blir da: $3\cdot 0.651 \approx 1.95$

Egentlig mest fornuftig (tidsbesparende!) å regne ut dette med lommeregner:

Y1=3.5cos(π/2(X-1))+2.5

MATH,9:fnInt(Y1,X,2.51,3.49)=-0.651

Enda mer fornuftig er å velge Alternativ II, som gir mindre regning og sparer tid:

Oppgave 4 - Alternativ II

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}, \qquad D_f = [0,9]$

a)
$$V = \pi\int_0^9 f^2(x)dx = \pi\int_0^9 xdx = \pi\left[\tfrac{x^2}{2}\right]_0^9 = \pi\tfrac{9^2}{2} = \tfrac{81}{2}\pi \approx 127$$

b)
Å dreie $g(x) = f(x) - k$ om x –aksen blir det samme som å dreie $f(x)$ om linjen k.
(Lag en enkel figur som illustrerer dette!)

Så vi får: $V(k) = \pi\int_0^9 g^2(x)dx = \pi\int_0^9 (f(x)-k)^2dx = \pi\int_0^9 (x^{\frac{1}{2}} - k)^2dx \qquad QED$

c)
$V(k) = \pi \int_0^9 (x - 2kx^{\frac{1}{2}} + k^2)dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - 2k\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k^2 x \right]_0^9 =$
$\pi(\frac{9^2}{2} - \frac{4}{3}k9^{\frac{3}{2}} + k^2 9 - 0) = \pi(9k^2 - 36k + \frac{81}{2})$

d)
$V'(k) = 18\pi x - 36\pi$

Minimum når $V'(k) = 0 \Leftrightarrow 18\pi x - 36\pi = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Oppgave 5

Generelt:
Kraft=masse•akselerasjon

$mg - kv = mv' \Leftrightarrow mv' + kv = mg \Leftrightarrow v' + \frac{k}{m}v = g$

Her:
$v' + \frac{1}{4}v = 10$ $(g = 10, \frac{k}{m} = \frac{1}{4})$

a)
Vi ***slipper*** ballen (vi kaster den ikke), så startfarten er null; $v(0) = 0$ [m/s]

Her går både integrerende faktor og separering, jeg velger separering:

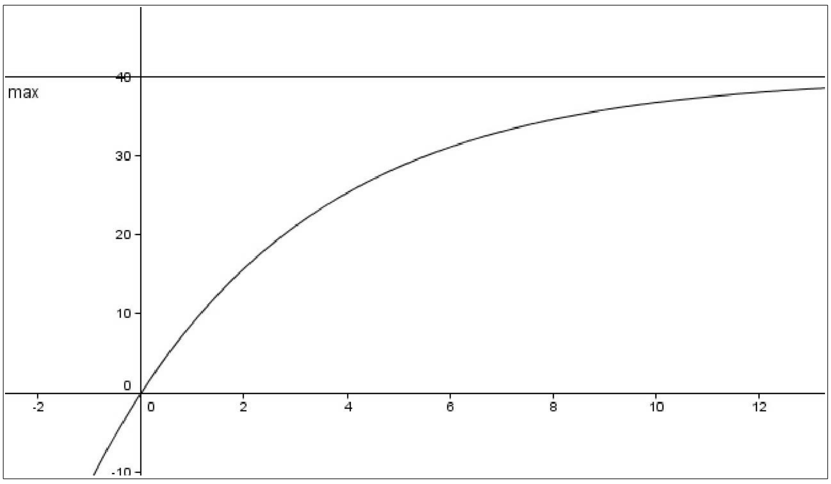
$v' = 10 - \frac{1}{4}v \Leftrightarrow v' = (40 - v)\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{v'}{v-40} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \int \frac{1}{v-40}dv = -\frac{1}{4}\int dt \Leftrightarrow$
$\ln|v - 40| = -\frac{t}{4} + C_1 \Leftrightarrow |v - 40| = e^{-\frac{t}{4}+C_1} \Leftrightarrow v - 40 = Ce^{-\frac{t}{4}} \Leftrightarrow$

$v(t) = 40 + Ce^{-\frac{t}{4}}$ (Generell løsning)

Spesiell løsning:

$v(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = 40 + Ce^0 \Leftrightarrow C = -40$

$v(t) = 40 - 40e^{-\frac{t}{4}} = 40(1 - e^{-\frac{t}{4}})$



b)
Den enkle (eksakte) differensialligningen $s'(t) = v(t), \qquad s(0) = 0$
gir oss løsningen:
$s(t) = \int v(t)dt = \int(40 - 40e^{-\frac{t}{4}})dt = 40t - 40\frac{e^{-\frac{t}{4}}}{-\frac{1}{4}} + C =$
$C + 40t + 160e^{-\frac{t}{4}}$ (Generell løsning.)

Spesiell løsning:
$s(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = C + 40 \cdot 0 + 160e^0 \Leftrightarrow C = -160$

$s(t) = 40t + 160e^{-\frac{t}{4}} - 160$ [m]

c)
Ballen tar bakken når:
$h = s(t) \Leftrightarrow 30 = 40t + 160e^{-\frac{t}{4}} - 160 \Leftrightarrow 4t + 16e^{-\frac{t}{4}} - 19 = 0$

Ikke prøv å løs dette eksakt, ***må*** bruke lommeregner, for eksempel:

Y1=4X+16e ^(-X/4)-19
og
CALC,zero: $x = 2.73$ [sek]

Fart ved nedslag: $v(2.73) = 40(1 - e^{-\frac{2.73}{4}}) \approx 19.8$ [m/s]

d)
Ny initialbetingelse: $v(0) = v_0 \Leftrightarrow v_0 = 40 + Ce^0 \Leftrightarrow C = v_0 - 40$

Spesiell løsning: $v(t) = 40 + (v_0 - 40)e^{-\frac{t}{4}}$

$s(t) = \int v(t)dt) = 40t - 4(v_0 - 40)e^{-\frac{t}{4}} + C$ (Generell løsning)

Spesiell løsning: $s(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = C - 4(v_0 - 40) \Leftrightarrow C = 4(v_0 - 40)$

$s(t) = 40t - 4(v_0 - 40)e^{-\frac{t}{4}} + 4(v_0 - 40)$

Vi får ligningen:

$30 = 40 \cdot 2 - 4(v_0 - 40)e^{-\frac{2}{4}} + 4(v_0 - 40) \Leftrightarrow$
$80 - 4v_0e^{-0.5} + 160e^{-0.5} + 4v_0 - 160 - 30 = 0 \Leftrightarrow$
$1.574v_0 - 12.96 = 0 \Leftrightarrow$
$v_0 = \frac{12.96}{1.574} \approx 8.23$ [m/s]