Oppgaver på fagdag 3. mars 2011

2. mars 2011

Oppgave 1 – Funksjoner med lineær kjerne

Vi skal se på integraler på formen $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$, der f er en funksjon med lineær kjerne $(ax+b)$.

(a) Beregn følgende integraler (metode avgjør du selv). Bruk derivasjon til å bekrefte at du har regnet riktig.

- $\int \sin 3x \,\mathrm{d}x$
- $\int \sqrt{2x-3}\,\mathrm{d}x$
- $\int e^{\frac{1}{5}x}\,\mathrm{d}x$
- $\int \frac{1}{4x+1}\,\mathrm{d}x$

(b) La $f(u)$ være en funksjon med kjerne $u = ax+b$. La $F(u)$ være en antiderivert av $f(u)$ med hensyn på u, det vil si at

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$$

Vis at da er

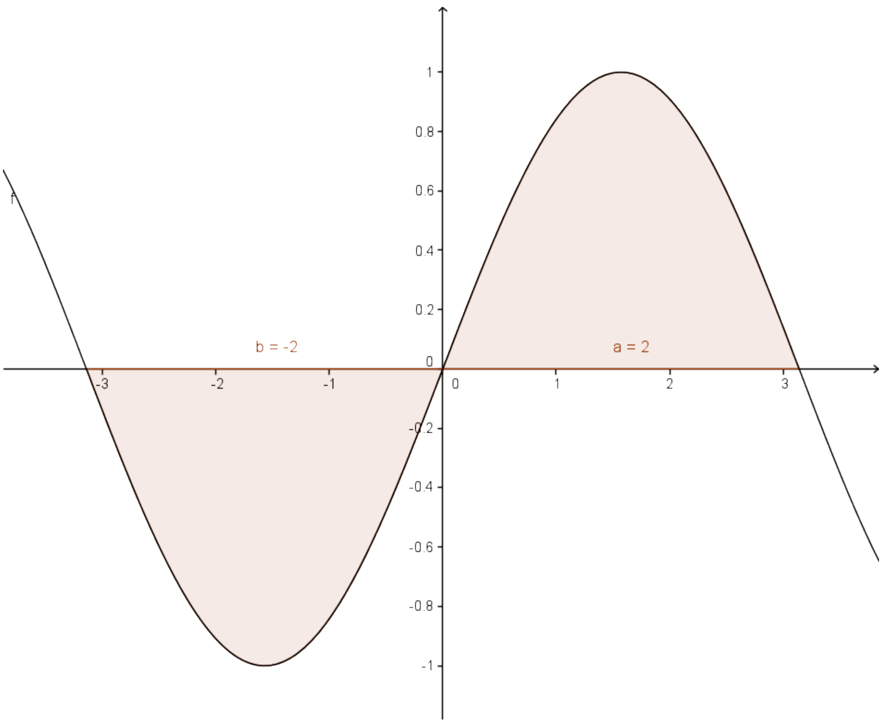
$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

(c) Kan det finnes det noe tilsvarende for f.eks. funksjoner med kvadratiske kjerner? Se på integralene under og argumenter for hvorfor eller hvorfor ikke.

- $\int \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x$
- $\int \frac{1}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 2 – Arealet mellom to grafer

Vi bruker bestemte integraler til å regne ut areal. Her er et eksempel på dette.



Arealet avgrenset av $f(x) = \sin(x)$, x-aksen og linjene $x = 0$ og $x = \pi$ er

$$A_1 = \int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x = 2$$

siden $f(x) \geq 0$ på intervallet $[0, \pi]$. Arealet avgrenset av $f(x)$ og linjene $x = -\pi$ og $x = 0$ er derimot

$$A_2 = |\int_{-\pi}^0 \sin x \, \mathrm{d}x| = |(-2)| = 2$$

siden $f(x)$ er negativ på $[-\pi, 0]$ (vi ser at selve integralet er negativt, men areal er alltid et **positivt** tall). Dette kan generaliseres til at arealet alltid er definert som absoluttverdien av integralet (hvis integralet uansett er positivt, som A_1, endrer ikke absoluttverdien noe). Det totale arealet avgrenset av $f(x)$, x-aksen og linjene $x = -\pi$ og $x = \pi$ blir

$$A = A_1 + A_2 = 4$$

I denne oppgaven skal vi se nærmere på arealet **mellom to grafer**.

I oppgave (a)–(c) har vi gitt to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$. Tegn de to funksjonene i samme koordinatsystem (bruk gjerne GeoGebra), og beregn arealet avgrenset av de to grafene. Beregn deretter $\int_a^b (f(x) - g(x)) \, \mathrm{d}x$ der a og b er skjæringspunktene mellom $f(x)$ og $g(x)$. Hva ser du?

(a) $f(x) = -x^2 - 3x + 5$ og $g(x) = x + 5$

(b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - 2x^2$ og $g(x) = 2x^2 - 24$

(c) $f(x) = 2 - x^2$ og $g(x) = x^2 - 2x - 2$

(d) Forklar hvorfor arealet mellom $f(x)$ og $g(x)$ kan beregnes ved $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$, uansett «hvor» grafene befinner seg (men forutsatt at $f(x) \geq g(x)$ på $[a, b]$).

Oppgave 3 – Volumet av en kule

En sirkel med radius r kan beskrives som alle punkter (x, y) som oppfyller likningen

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Merk at dette ikke er en funksjon (hvorfor ikke?). En halvsirkel med radius r kan derimot beskrives ved funksjonen

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Vi skal bruke dette uttrykket til å finne volumet av en kule.

(a) En halvsirkel med radius 2 er gitt ved $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ der $x \in [-2, 2]$. Tegn $f(x)$ i et koordinatsystem, og beregn volumet av omdreiningsfiguren som oppstår når vi roterer $f(x)$ om x-aksen.

Sammenlikn svaret med det du får ved å bruke formelen for volum av kule, gitt ved

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

(b) Utled formelen gitt over. Hint: Utfør et tilsvarende integral som i (a), men bruk en *generell* halvsirkel der radien er en vilkårlig størrelse r.

Oppgave 4 – Numerisk integrasjon

(a) Vi skal se på funksjonen $f(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$. Du skal finne en tilnærming av arealet avgrenset av grafen til $f(x)$, x-aksen og linjene $x = 0$ og $x = 1$. Del inn arealet under grafen i fire rektangler. (Det kan være lurt å tegne grafen først, f.eks. i GeoGebra.)

(b) Bruk funksjonene `sumover` og `sumunder` i GeoGebra til å finne tilnærmede verdier for integralet

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Varier antall rektangler n, gjerne med en glider. Etter tilstrekkelig mange rektangler stabiliserer de første desimalene i arealtilnærmingen seg.

(c) Det går ikke an å finne en antiderivet av funksjonen $f(x)$. Derfor vil vi finne en så god numerisk tilnærming som mulig når vi skal finne bestemte integraler. I oppgavene over ble det benyttet rektangler til å tilnærme arealet under grafen. Kom med et annet forslag til tilnærming – hvilke andre planfigurer kan være aktuelle å bruke, helst med bedre resultat enn «rektangelmetoden»? Finn en tilnærming for arealet i (a), med $n = 4$, for en annen figur enn rektangel. Sammenlikn resultatet med resultatet i (a) og «fasitsvaret» fra (b).

Oppgave 5 – Volumet av en pyramide

Vi har en pyramide med kvadratisk grunnflate. Sidekanten i grunnflaten er 3, mens høyden i pyramiden er 4.

(a) Tegn pyramiden. Bruk formelen $V = \frac{1}{3}g^2h$ til å beregne volumet av pyramiden. (g er sidekanten i grunnflaten.)

(b) Finn volumet av pyramiden ved å integrere. *Hint:* Dette er *ikke* en omdreiningsfigur, siden snittflatene er kvadratiske istedenfor runde! Det kan være lurt å tegne x-aksen slik at $x = 0$ i toppen av pyramiden. Da har vi $A(0) = 0$ og $A(4) = 3^2 = 9$. Et annet tips er å bruke formlikhet for å finne et generelt uttrykk for $A(x)$.

(c) Utled formelen $V = \frac{1}{3}g^2h$ ved å bruke et integral. *Hint:* Gjenbruk integralet fra (b), men med h og g istedenfor tallene dere brukte.