R2 - Eksamen - H2013

Løsningsskisser

Del 1 - Uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Produktregel: $f'(x) = 5\cos x + 5x(-\sin x) = 5(\cos x - x\sin x)$

b) Brøkregel: $g'(x) = \frac{\cos(2x)2x - \sin(2x)1}{x^2} = \frac{2x\cos(2x) - \sin(2x)}{x^2}$

Oppgave 2

a) $\int_0^1 2e^{2x}dx = 2\int_0^1 e^{2x}dx = 2\ {}_0^1[\frac{1}{2}e^{2x}] = {}_0^1[e^{2x}] = e^2 - e^0 = e^2 - 1$

b) Delvis: $2\int xe^{2x}dx = 2(x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx) = 2(\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}) = (x - \frac{1}{2})e^{2x}$

Oppgave 3

a)
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = [-2, 3, 0] \cdot [-2, 0, 4] = 4 + 0 + 0 = 4$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-2, 3, 0] \times [-2, 0, 4] = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_z & \vec{e}_z \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = [12, 8, 6] = 2[6, 4, 3]$$

b)
$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AO}\right| = \frac{1}{6}|2[6, 4, 3] \cdot [-2, 0, 0]| = 4$
(Litt dum oppgave, ser jo at $OA = 2, OB = 2$ og $OC = 4$, så vi har mer direkte,
uten vektorregning: $V = \frac{Gh}{3} = \frac{\frac{OA \cdot OB}{2}OC}{3} = \frac{\frac{2 \cdot 3}{2}4}{3} = 4$)
c)
Velger nrmalvektor: $\vec{n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [6, 4, 3]$
Med A som punkt i planet har vi betingelsen:

$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x - 2, y - 0, z - 0] \cdot [6, 4, 3] = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 + 4y + 3z = 0$
):

$\alpha : 6x + 4y + 3z - 12 = 0$

Divisjon med 12 gir: $\alpha : \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$ *QED*

Oppgave 4

a)
Geometrisk fordi vi har kvotient: $k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Konvergent fordi: $-1 < \frac{1}{e} < 1$
Sum: $S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$

b) Konvergensområde:

$$-1 < e^{-x} < 1 \Leftrightarrow (e^{-x})^2 < 1 \Leftrightarrow (e^{-x})^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow (e^{-x} - 1)(e^{-x} + 1) < 0$$

$-1 < 0 < e^{-x}$ så venstre ulikhet oppfylt uansett x.

$$e^{-x} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-e^x}{e^x} < 0 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

): Konvergensområde: $\langle 0, \rightarrow \rangle$

Sum: $S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x-1}$

Oppgave 5

Integrasjon gir: $N(t) = 2t^2 + 3t + C$
Kravet gir: $N(0) = 800 \Leftrightarrow 0 + 0 + C = 800 \Leftrightarrow C = 800$

): $N(t) = 2t^2 + 3t + 800$ og $N(10) = 200 + 30 + 800 = 1030$

Oppgave 6

a)

$$f'(x) = 2x^3 - 6x^2 + \frac{5}{2}, \qquad f''(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$$

Vendepunkter: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

): $(0, 0)$ og $(2, -3)$

b)

Ett-punktsformel gir:

$$y - 0 = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}x \Leftrightarrow 2y - 5x = 0$$

og:

$$y - (-3) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y + 3 = -\frac{11}{2}(x-2) \Leftrightarrow$$
$$y = -\frac{11}{2}x + 8 \Leftrightarrow 2y + 11x - 16 = 0$$

Oppgave 7

I P(1):

VS: $a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$
HS: $S_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ $OK!$

II P(n)→P(n+1):

Må vise: $S_{n+1} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} =$$
$$\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \ OK!$$

Del 2 - Med hjelpemidler

Oppgave 1

a)
$F(v) = (AB + CD)\frac{h}{2}$, der: $AB = 2$, $CD = 2 \cdot OC \cos v$, $h = OC \sin v$
Slik at:
$$F(v) = (2 + 2\cos v)\frac{\sin v}{2} = (1 + \cos v)\sin v \qquad QED$$

Definisjonsmengde: $\langle 0, 90^\circ\rangle$ (For å unngå at C og D bytter plass.)

b)
$F(v) = \sin v + \sin v \cos v = \sin v + \frac{1}{2}\sin 2v$
$F'(v) = \cos v + \frac{1}{2}\cos 2v 2 = \cos v + \cos 2v = \cos v + 2\cos^2 v - 1$

Størst når $F'(v) = 0 \iff 2\cos^2 v + \cos v - 1 = 0 \iff \cos v = \frac{1}{2} \vee \cos v = -1 \iff$
$v = 60^\circ \vee v = 180^\circ$ (Forkastes)

$F_{\max} = F(60^\circ) = (1 + \cos 60^\circ)\sin 60^\circ = (1 + \frac{1}{2})\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.30$

Oppgave 3

(Forutsetning: Mange år, tilnærmet kontinuerlig funksjon...)
a)
Løser som separabel:
$20000 + 0.08K \neq 0$:
$$\frac{K'}{20000+0.08K} = 1 \iff \int \frac{K'}{20000+0.08K}dt = \int dt \iff \int \frac{1}{20000+0.08K}dK = t + C_1 \iff$$
$$\frac{1}{0.08}\ln|20000 + 0.08K| = t + C_1 \iff \ln|20000 + 0.08K| = 0.08t + C_2 \iff$$
$$|20000 + 0.08K| = e^{0.08t}C_3 \iff$$
Generell løsning: $K(t) = \frac{C_4 e^{0.08t} - 20000}{0.08} = Ce^{0.08t} - 250000$

($C = 0$ dekker tilfellet $20000 + 0.08K = 0$)

Initialbetingelse: $K(0) = 20000 \iff Ce^0 - 250000 = 20000 \iff C = 270000$

Spesiell løsning: $K(t) = 270000e^{0.08t} - 250000$

b)
$K(20) = 270000e^{0.08 \cdot 20} - 250000 \approx 1087300$ [kr]

c)
$K'(t) = 35000$ gir: $0.08K(t) + 20000 = 35000 \iff K(t) = \frac{35000-20000}{0.08} = 187500$
Som igjen gir: $270000e^{0.08t} - 250000 = 187500 \iff e^{0.08t} \approx 1.6204 \iff$
$$t = \frac{\ln(1.6204)}{0.08} \approx 6.033$$
): Cirka 6 år

(Artig å sjekke med en eksakt modell, sparing med faste innskudd gir etter t år rekken: $20' + 20' \cdot 1.08 + 20' \cdot 1.08^2 + \ldots + 20' \cdot 1.08^t$ og vi får:

$K(t) = a_1\frac{k^{t+1}-1}{k-1} = 20\frac{1.08^{t+1}-1}{1.08-1} = 250' \cdot 1.\,08^{t+1} - 250' =$
$250'1.08 \cdot 1.08^t - 250' = 270'1.08^t - 250' =$
$270000 \cdot 1.08^t - 250000$

eller

$K(t) = 270000e^{\ln 1.08 \cdot t} - 250000 = 270000e^{0.077t} - 250000$

Økningen i det sjette året blir da:

$K(7) - K(6) = 270000e^{0.077 \cdot 7} - 250000 - (270000e^{0.077 \cdot 6} - 250000) \approx 34300$

som ikke er så langt unna 35000.)

Oppgave 4

a) Integralene som er oppgitt gir utregnet den oppgitte ligningen,
da $\int x^n dx = \frac{x^n}{n+1} + C_1$ og $\int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C_2$ og $C = C_2 - C_1$
(Tallverdi på ln-funksjonen unødvendig pga. definisjonsmengden.)

$x = 0$ gir $VS = 0$, og $HS = C$, så C må være null.

b)
Venstre side følger direkte.
$HS = -\ln(1 - \frac{1}{2}) = -\ln(\frac{1}{2}) = -(\ln 1 - \ln 2) = \ln 2$ *QED*

Kan prøve seg frem med manuell regning, men greiest med digitalt verktøy:

TI lommeregnere:

```
Y1=1/(2 ^X*X)
...
sum(seq(Y1,X,1,16)   gir   0.6931463...   Ikke OK
sum(seq(Y1,X,1,17)   gir   0.6931467...   OK
```

GeoGebra CAS:

```
f(x):=1/(2 ^x*x)
sum(Følge[f(x),x,1,16) med numerisk utregning gir samme svar.
```

): Må ha 17 ledd for å få 6 korrekte desimaler.

Oppgave 5

a)
$g(x)$: $(1-kx)(1+kx) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{k}$
): $(-\frac{1}{k}, 0)$, $(\frac{1}{k}, 0)$

b)
$f(x)$: $A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = {}_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\sin x] = \sin\frac{\pi}{2} - \sin -\frac{\pi}{2} = 2$

$g(x)$: $A_2 = \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} (1 - k^2x^2)dx = {}_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}}[x - \frac{k^2}{3}x^3] =$
$\frac{1}{k} - \frac{k^2}{3}\frac{1}{k^3} - (-\frac{1}{k} - \frac{k^2}{3}\frac{1}{-k^3}) = \frac{4}{3k}$

$A_1 = A_2 \Leftrightarrow 2 = \frac{4}{3k} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$

c)
$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x =$
$\cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$

Løser vi resultatet; $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ mhp. $\cos x$, får vi:
$\cos^2 x = \frac{\cos 2x+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$ *QED*

d) $V_1 = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2})dx =$
$\pi {}_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}] = \pi(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} - (\frac{1}{2}(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin -\pi}{2})) =$
$\pi(\frac{\pi}{4} + 0 - (-\frac{\pi}{4} + 0)) = \frac{\pi^2}{2}$

Oppgave 6

a)
To-punktsformel på $A = (a, 0)$ og $B = (0, b)$:
$y - y_A = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_A) \Leftrightarrow y - 0 = \frac{0-b}{a-0}(x-a) \Leftrightarrow y = -\frac{b}{a}x + b$ *QED*

b)
Ligningsform: $ay + bx = ab$
Divisjon med ab gir ønsket form: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

c)
$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-a, b, 0] \times [-a, 0, c] = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_z & \vec{e}_z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{bmatrix} = [bc, ac, ab] \ \textit{QED}$$

d)
Med A som punkt i planet har vi betingelsen:
$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x-a, y-0, z-0] \cdot [bc, ac, ab] = 0 \Leftrightarrow$
$bcx - abc + acy + abz = 0$

Divisjon med abc gir:
$\frac{x}{a} - 1 + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ *QED*

e)
D tilsvarer A, med $a = 5$
E tilsvarer B, med $b = 4$
F tilsvarer C, med c foreløpig, variabel, skal gå mot uendelig,
for å få parallellitet med z-akse som grensetilfelle.

d) gir da:
$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{c} = 1$

Grensetilfellet når $c \to \infty$ gir $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$ eller $4x + 5y - 1 = 0$

(Som man ser tilsvarer dette en normalvektor $\vec{n} = [4, 5, 0]$,
som vi kunne funnet ved å finne vektor normalt på
$\vec{e}_z = [0, 0, 1]$ og $\overrightarrow{DE} = [-5, 4, 0]$ vha. vektorprodukt:

$$\vec{e}_z \times \overrightarrow{DE} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_z & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix} = [-4, 5, 0]$$

Valget $\vec{n} = -\vec{e}_z \times \overrightarrow{DE}$ gir: $\vec{n} = [4, 5, 0]$

og videre:

$[x-5, y-4, z-0] \cdot [4, 5, 0] = 0 \Leftrightarrow 4x - 20 + 5y + 0 = 0 \Leftrightarrow$

$4x + 5y = 20 \Leftrightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$ (Etter divisjon med 20.))