R2 - Eksamen 04.06.2012 - Løsningsskisser

Del 1 - Uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) 1)

Kjerneregel: $f(x) = 3\sin u, \qquad u = 2x$
$f'(x) = 3\cos u \cdot 2 = 6\cos u = 6\cos(2x)$

2)

Produktregel: $g'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x = x(2\sin x + x\cos x)$

3)

Kjerneregel: $k(x) = 5\cos u + 7, \qquad u = \frac{\pi}{12}x - 2$
$k'(x) = 5(-\sin u)\frac{\pi}{12} = -\frac{5\pi}{12}\sin(\frac{\pi}{12}x - 2)$

b)

Delvis integrasjon: $\int xe^{2x}dx = x\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}e^{2x} + C =$
$\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + C$

c)

Variabelskifte: $u = x^2 - 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2x}du$
$\int \frac{2x}{x^2-4}dx = \int \frac{2x}{u}\frac{1}{2x}du = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|x^2-4| + C$

$\int_3^7 \frac{2x}{x^2-4}dx = _3^7[\ln|x^2-4|] = \ln|7^2-4| - \ln|3^2-4| = \ln 45 - \ln 5 =$
$\ln(5\cdot 9) - \ln 5 = \ln 5 + \ln 9 - \ln 5 = \ln 9 = \ln 3^2 = 2\ln 3 \qquad QED$

d)

Kan separere eller bruke integrerende faktor, separerer:
$y' = 3 + 2y \Leftrightarrow \frac{y'}{3+2y} = 1, \qquad y \neq -\frac{3}{2}$
$\int \frac{y'}{3+2y}dx = \int dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{3+2y}dy = \int dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln|3+2y| = x + C_1 \Leftrightarrow$
$\ln|3+2y| = 2x + C_2 \Leftrightarrow 3 + 2y = C_3e^{2x} \Leftrightarrow$
$y = Ce^{2x} - \frac{3}{2}$ (Generell løsning. Inkluderer $y = -\frac{3}{2}$.)

Initialbetingelse: $8 = Ce^0 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = 8 + \frac{3}{2} = \frac{19}{2}$

$y = \frac{19}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}$ (Spesiell løsning.)

e)

1) Geometrisk rekke med kvotient $k = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{e^x} < 1$

$|k| < 1$ er oppfyllt og rekken konvergerer.

2) $S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{e^x}} = \frac{e^x}{e^x-1}$ *QED*

f)

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = [3,-1,2] \cdot [6,4,2] = 18 - 4 + 4 = 18$

b) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 3 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = [-10,6,18] = 2[-5,3,9]$

c) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{a} = (3^2 + 1^2 + 2^2) - 18 = -4$

Oppgave 3

a) Produktregel: $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

Produktregel: $f''(x) = e^x + (1+x)e^x = 2e^x + xe^x = (2+x)e^x$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1+x)e^x = 0 \Leftrightarrow 1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$BP = (-1, f(-1)) = (-1, -e^{-1}) = (-1, -\frac{1}{e})$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (2+x)e^x = 0 \Leftrightarrow 2 + x = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$VP = (-2, f(-2)) = (-2, -2e^{-2}) = (-2, -\frac{2}{e^2})$

c)

$\underline{n = 1:}$

$f'(x) = (x+1)e^x$ OK, se a)

$\underline{n \to n+1:}$

Må vise at $f^{(n+1)} = (x+n+1)e^x$ hvis vi forutsetter at $f^{(n)} = (x+n)e^x$:

$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = ((x+n)e^x)' = 1e^x + (x+n)e^x =$ (produktregel)

$e^x + xe^x + ne^x = (x+n+1)e^x$ OK

Del 2 - Uten hjelpemidler

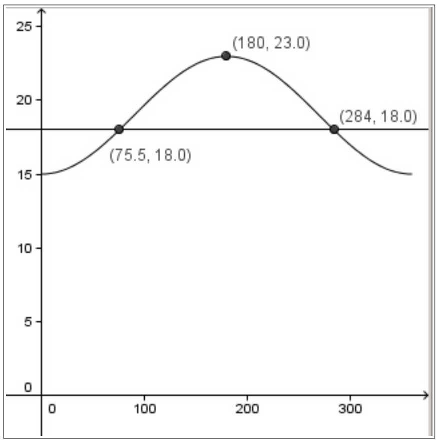
Oppgave 4

$f(t) = 19 - 4\cos(\frac{\pi}{180}t)$ [timer], $t \geq 0$ [dager]

(I praktiske oppgaver burde antall gjeldende siffer vært angitt, eksempelvis:
$f(t) = 19.0 - 4.00\cos(\frac{\pi}{180}t)$)

a) 25 mars: $t = 2 \cdot 30 + 25 = 85$
$f(85) = 19 - 4\cos(\frac{\pi}{180}85) \approx 18.7 = 18:42$
): Det mørkner ca. kl. 18:40

b)



Likevektslinje: $L = 19$
Amplitude: $A = 4$
Periode: $\frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{180} \Leftrightarrow T = 360$ $(30 \cdot 12)$
(Faseforskyving: 180)

Gjennomsnittlig tidspunkt tilsvarer L; kl. 19:00

c) $19.0 - 4.00\cos(\frac{\pi}{180}t) = 18 \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{180}t) = \frac{1}{4}$
$\frac{\pi}{180}t = 1.32 + k2\pi \vee \frac{\pi}{180}t = 2\pi - 1.32 + k2\pi$
$t = \frac{180 \cdot 1.32}{\pi} + k360 \vee t = \frac{(2\pi - 1.32)180}{\pi} + k360$
$t \approx 75.6 + k360 \vee t = 284 + k360$
): ca. 16. mars og 14. oktober

d) Lengst dagslys tilsvarer senest tidspunkt:
$f_{\max} = 19 - 4(-1) = 23$
når
$\frac{\pi}{180}t = \pi + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi 180}{\pi} + k360 = 180 + k360$

): ca. 30. juni

Oppgave 5

a) $\tan(u - v) = \frac{\sin(u-v)}{\cos(u-v)} = \frac{\sin u \cos v - \cos u \sin v}{\cos u \cos v + \sin u \sin v} = \frac{\frac{\sin u \cos v - \cos u \sin v}{\cos u \cos v}}{\frac{\cos u \cos v + \sin u \sin v}{\cos u \cos v}} =$
$\frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$ *QED*

b) Trekantene gir: $\tan v = \frac{1}{x}$ og $\tan u = \frac{4}{x}$, som gir:
$f(x) = \tan\alpha = \tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v} = \frac{\frac{4}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{4}{x}\frac{1}{x}} = \frac{3x}{x^2 + 4}$ *QED*

c) Brøkregel: $f'(x) = \frac{3(x^2+4)-3x2x}{(x^2+4)^2} = \frac{12-3x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$

Maksimum: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{12-3x^2}{\left(x^2+4\right)^2} = 0 \Leftrightarrow 12-3x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$3(4-x^2) = 0 \Leftrightarrow 3(2-x)(2+x) = 0 \Leftrightarrow$

$x = -2$ (forkastes) $\vee x = 2$

Største verdi: $f(2) = \frac{3\cdot 2}{2^2+4} = \frac{3}{4}$

når: $x = 2$ [m]

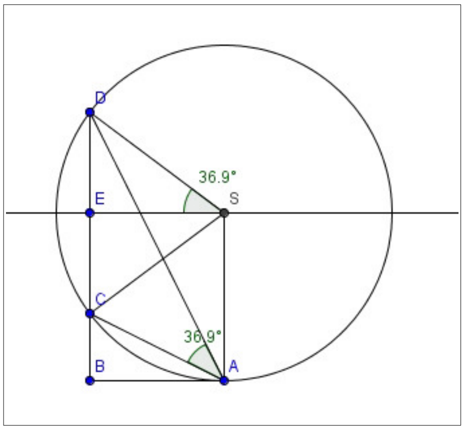
d) Største synsvinkel: $\tan\alpha = \frac{3}{4}$

): ca. 36.9°

(Det går an å løse dette geometrisk ved hjelp av R1-pensumet:

Hvis punktet A beveges rundt i rommet på en sirkel som går gjennom A og B, vil α være konstant (periferivinkel) hvis sirkelens radius holdes konstant. (Sirkel, A, B, C og D i samme plan.)

Hvis A kommer innenfor sirkelen blir α mindre, hvis A kommer utenfor sirkelen blir α større. For en gitt sirkel er altså α maksimum når sirkelen tangerer AB i A:



Da er $ED = 1.5$ og $DS = AS = BE = 2.5$

Vinkelen er da gitt av:

$$\sin\alpha = \frac{ED}{DS} = \frac{1.5}{2.5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha \approx 36.9^\circ$$

Rettvinklet trekant med sider 3,4 og 5 viser at da er også $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ slik som i oppgavens utregning.)

Oppgave 6

Motstand (vann og luft) proporsjonalt med kvadratet av farten og motsatt rettet:

$y' = ky^2, \qquad k < 0$

a) Initialbetingelser:

$y(0) = 25, \qquad y'(0) = -12$

Disse gir innsatt i differensialligningen:

$-12 = k25^2 \Leftrightarrow k = -\frac{12}{25^2} = -0.0192$ [1/m]

Separabel: $\frac{y'}{y^2} = k, \qquad y \neq 0$

$\int \frac{y'}{y^2} dx = \int k dx \Leftrightarrow \int y^{-2} dy = \int k dx \Leftrightarrow \frac{y^{-2+1}}{-2+1} = kx + C_1 \Leftrightarrow$
$\frac{1}{y} = \Leftrightarrow -C_1 - kx \Leftrightarrow y = \frac{1}{C-kx}$

OBS: Vi forutsatte at $y \neq 0$, og innsetting i differensialligningen
viser at $y = 0$ også er en løsning.

): Generell løsning: $y = \frac{1}{C-kx} \vee y = 0$

Initialbetingelse: $y(0) = 25$ fører til at $y = 0$ ikke kan brukes, så vi får:
$y = \frac{1}{C+0.02x}$
hvis vi runder av $k = -0.0192$ til ett gjeldende siffer (?!?) slik oppgaven har gjort...

At oppgaven kaller dette en "generell" løsning er *feil*, da vi har brukt
initialbetingelsene til å eliminere $y = 0$, så dette er en *spesiell* løsning!

b) Initialbetingelsen $y(0) = 25$ gir: $25 = \frac{1}{C-0} \Leftrightarrow C = \frac{1}{25} = 0.04$

c) Eksakt differensialligning: $s' = y$
Løses med integrasjon:
$s = \int y dx = \int \frac{1}{0.02x+0.04} dx = 50 \int \frac{1}{x+2} dx = 50 \ln|x+2| + D$
): $s = 50 \ln(x+2) + D$ [m], $x \geq 0$ [s] (Generell løsning.)

Her har vi initialbetingelsen at $s(0) = 0$:
$0 = 50 \ln 2 + D \Leftrightarrow D = -50 \ln 2$

): $s = 50 \ln(x+2) - 50 \ln 2 = 50 \ln \frac{x+2}{2}$ (Spesiell løsning.)

I løpet av tre sekunder: $s(3) = 50 \ln \frac{3+2}{2} \approx 46$ [m]

(Oppgaven legger opp til ett (?!?) gjeldende siffer, så kanskje jeg burde svare
50 m...)

Oppgave 7

a) Hver rute har areal: $\frac{1}{5}\frac{1}{5} = \frac{1}{25}$
Antall ruter: $1 + 2 + 3 + 4 + 5$

Areal=antallruter•areal en rute: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)\frac{1}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

b) Hver rute har areal: $\frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$
Antall ruter: $1 + 2 + 3 + \ldots + n$

Areal=antall ruter•areal en rute:
$S_n = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)\frac{1}{n^2} = 1(\frac{1}{n^2}) + 2(\frac{1}{n^2})^2 + 3(\frac{1}{n^2})^2 + \ldots + n(\frac{1}{n^2})^2$ *QED*

Aritmetisk sum: $(a_1 + a_n)\frac{n}{2}$ gir: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = (1 + n)\frac{n}{2}$

): $S_n = (1 + n)\frac{n}{2}\frac{1}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$ *QED*

c) $S_5 = \frac{5+1}{2\cdot 5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ som selvfølgelig er det samme som i a)

d) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}$ *QED*

Når n blir stor, vil det bli mange, små trinn fra A til C.
Det store antallet små trinn vil derfor bli mer og mer lik en rett linje fra A til C, så arealet vil gå mot arealet av trekanten ABC, som er:
$\frac{AB\cdot AC}{2} = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ som stemmer med hva vi regnet ut.

Oppgave 8

a) I planet β: $\overrightarrow{AB} = [2,0,-4]$, $\overrightarrow{AC} = [1,1,0]$
Normalvektor til planet β:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [4,-4,2] = 2[2,-2,1]$$

Velger: $\overrightarrow{n_\beta} = [2,-2,1]$

Med $P(x,y,z)$ i planet β: $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n_\beta} = 0 \Leftrightarrow [x,y,z-4] \cdot [2,-2,1] = 0 \Leftrightarrow$

$2x - 2y + z - 4 = 0$ (Ligning for plan β.)

Plan α har normalvektor $\overrightarrow{n_\alpha} = [2,-2,1] = \overrightarrow{n_\beta}$;
$\overrightarrow{n_\alpha} \parallel \overrightarrow{n_\beta} \Leftrightarrow \alpha \parallel \beta$

b) Velger et punkt i α: $Q = (0,0,-2)$ (Velger $x = y = 0$)

$\overrightarrow{AQ} = [0,0,-6]$
Projeksjonen av $\overrightarrow{AQ}$ på normalvektoren er avstanden mellom planene:
$d = \left| \frac{\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{n_\alpha}}{|\overrightarrow{n_\alpha}|} \right| = \left| \frac{[0,0,-6]\cdot[2,-2,1]}{\sqrt{2^2+2^2+1}} \right| = \left| \frac{-6}{3} \right| = 2$

(Kunne også regnet ut avstandene til Origo:
$d_\alpha = \left| \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} \right| = \frac{2}{3}$
$d_\beta = \left| \frac{-4}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$

Fortegnene på tellerne viser at planen ligger på hver sin side av Origo, så
$d = d_\alpha + d_\beta = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$)

c) l har punktet $P = (5,-1,4)$ og retningsvektor $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{n_\beta}$

$[x,y,z] = [5,-1,4] + t[2,-2,1] \Leftrightarrow$

$$l : \left\{ \begin{array}{c} x = 5 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 4 + t \end{array} \right\}$$

d) Skjæring mellom l og α: $2(5+2t)-2(-1-2t)+4+t+2 = 0 \Leftrightarrow$
$9t+18 = 0 \Leftrightarrow t = -2$

): $D = (5+2(-2), -1-2(-2), 4+(-2)) \ = (1,3,2)$

Enhetsvektor langs l: $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} = \frac{1}{3}[2,-2,1]$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + d\,\vec{e} = [1,3,2] + 2\frac{1}{3}[2,-2,1] = [\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}] \Leftrightarrow$

$E = (\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3})$

e) $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OD} + \frac{d}{2}\,\vec{e} = [1,3,2] + 1\frac{1}{3}[2,-2,1] = [\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}] \Leftrightarrow$
$S = (\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3})$

Radius: $r = 1$

Kuleflateligning: $(x-\frac{5}{3})^2 + (y-\frac{7}{3})^2 + (z-\frac{7}{3})^2 = 1^2$

(Ingen grunn til å multiplisere ut til:
$x^2 - \frac{10}{3}x + y^2 - \frac{14}{3}y + z^2 - \frac{14}{3}z + \frac{38}{3} \ = 0$)