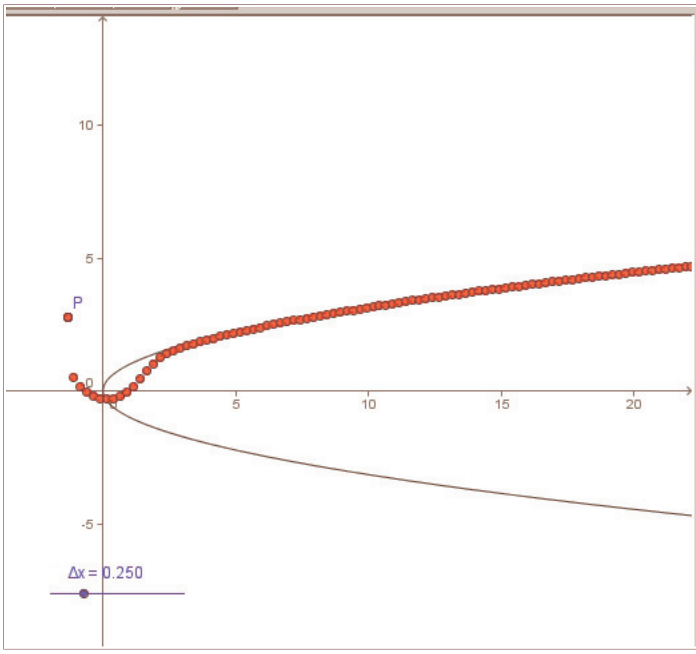
Retningsdiagram, integralkurver og Eulers metode

Innhold:

Hvordan man kan lage tilnærmede integralkurver med Eulers metode.
Her illustrert med GeoGebra, men kan gjøres i andre regneark eller med papir og blyant.
Viktig å kunne, fordi kjennskap til denne teknikken gjør det lettere å sette opp differensialligninger ut fra praktiske opplysninger!

Eksempel - Oppgave 622: $y' = x - y^2$

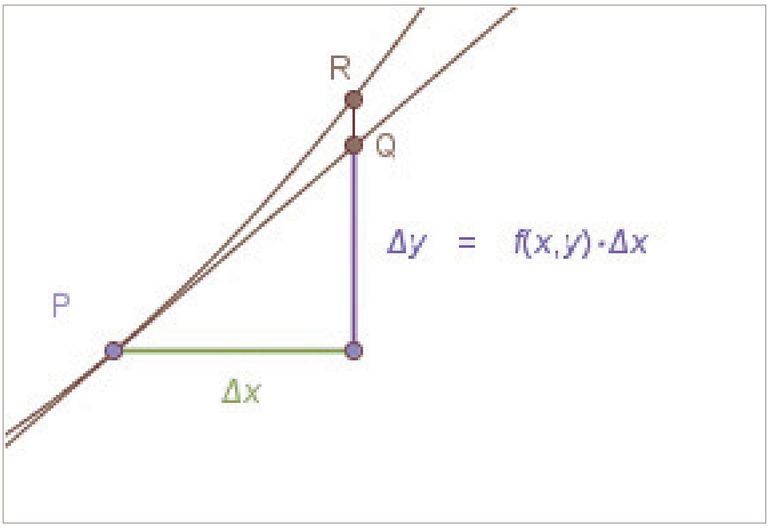


	A	B	C
1	x:	y:	y derivert:
2	-1.33	2.79	-9.12
3	-1.08	0.511	-1.34
4	-0.830	0.176	-0.861
5	-0.580	-0.0393	-0.581
6	-0.330	-0.185	-0.364
7	-0.0796	-0.276	-0.156
8	0.170	-0.314	0.0715
9	0.420	-0.296	0.332
10	0.670	-0.213	0.625
11	0.920	-0.0572	0.917
12	1.17	0.172	1.14
13	1.42	0.457	1.21
14	1.67	0.760	1.09
15	1.92	1.03	0.853
16	2.17	1.25	0.617
17	2.42	1.40	0.459
18	2.67	1.52	0.374
19	2.92	1.61	0.332
20	3.17	1.69	0.308
21	3.42	1.77	0.292
22	3.67	1.84	0.278
23	3.92	1.91	0.267

Eulers metode:

I første ordens differensialligninger av typen $y' = f(x,y)$

kan vi regne ut den deriverte, y', for ethvert punkt $P = (x,y)$ på integralkurven.



Da kan vi starte i P og gå Δx mot høyre og Δy oppover langs tangenten:
$\Delta y = y' \cdot \Delta x = f(x,y)\Delta x$ og kommer da til Q.

Hvis Δx er liten, er vi fortsatt nesten på kurven ($Q \approx R$) og kan tilnærmet regne slik:

$$R \approx Q = (x + \Delta x, y + \Delta y) = (x + \Delta x, y + f(x,y)\Delta x)$$

Vi har altså systemet:

Initialbetingelse: x_0, y_0 gitt. (Et punkt $P = (x_0, y_0)$.)

Rekursiv generering av nye punkter på integralkurven:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Start: } x_0, y_0 \\ x_{n+1} = x_n + \Delta x \\ y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\Delta x \end{array} \right\}$$

I GeoGebra gjør vi:

Lager glider med Δx

Legger inn et punkt P som blir initialbetingelse.

	A	**B**	**C**
1	x:	y:	y derivert:
2	=x(P)	=y(P)	=A2-B2*B2
3	=A2+Δx	=B2+C2*Δx	↓
4	↓	↓	↓
5	↓	↓	↓
...	...	...	...

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + \Delta x \\ y_{n+1} & = & y_n + f(x_n, y_n)\Delta x \end{array} \right\}$$

Vi legger altså inn formler i A2, B2, C2, A3 og B3, resten *kopierer vi nedover med musen*.

Forklaring til formlene i cellene:

Celle:	**Formel:**	**Tilsvarer:**	**Kommentar:**
A1, B1,C1	Tekst		Bare hjelpetekst
A2	x(P)	x_0	Initialverdi
B2	y(P)	y_0	Initialverdi
C2	=A2-B2*B2	$f(x_n, y_n) = x_n - y_n^2$	Den deriverte for punktet
A3	A2+Δx	$x_{n+1} = x_n + \Delta x$	x-verdi for punkt $n+1$
B3	=B2+C2*Δx	$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\Delta x$	y-verdi for nytt punkt $n+1$