R2 - 01.04.11

5.5: Volumberegninger

6.1 - 6.4: Differensialligninger

I

a) En omdreiningsfigur fremkommer ved at grafen til $f(x) = x\sqrt{5-x}$, $D_f = [0,5]$ roteres 360° om x-aksen.
Finn volumet til omdreiningsfiguren.
b) En kjegle med grunnflate G og høyde H er lagt med grunnflaten normalt på x-aksen der $x = H$, og med
spissen i origo. Vi skal bevise at volumet av kjeglen er $V = \frac{G \cdot H}{3}$.
Volumet er $V = \int_0^H A(x)dx$, der $A(x)$ er arealet av en snittflate gjennom kjeglen for en x mellom 0 og H.
i) Forklar hvorfor: $A(x) = \frac{G}{H^2}x$.
ii) Regn ut volumintegralet V og fullfør beviset.

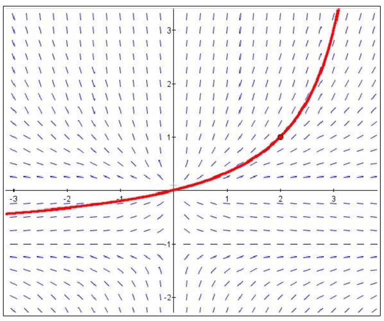
II

Løs differensialligningene:

a) $y' = -kx$ b) $y'y = x$
c) $y' = xy$ d) $y' + y = x$
e) $xy' + y = x + \sin x$

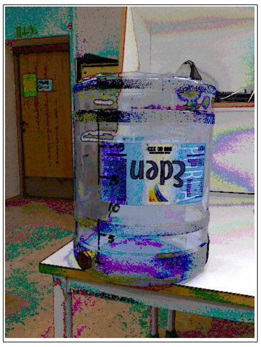
III

Vi har en differensialligning $y'x - y = y^2$. Ved hjelp av et dataprogram har vi fått laget følgende retningsdiagram:



a) Den røde prikken på integralkurven i retningsdiagrammet ligger i punktet $(2,1)$.
Hva er den deriverte til denne integralkurven i dette punktet?
b) Retningsdiagrammet antyder at løsningen er en hyperbel (rasjonal funksjon) og at den horisontale
asymptoten er $y = -1$. Vi antar derfor at løsningen er på formen $y = \frac{-x+A}{x+B}$, der A og B er konstanter.
Hvordan kan vi se at $A = 0$ ut fra retningsdiagrammet?
c) Vis at $y = \frac{-x}{x+B} = \frac{x}{C-x}$ er en løsning av differensialligningen.
d) Finn den spesielle løsningen som er fremstilt i retningsdiagrammet i a).

IV



Vi har en vanntank hvor vannet i utgangspunktet har en høyde $h(0) = 25$ cm over tappehullet. Toricelli kom frem til at høyden som funksjon av tiden beskrives av differensialligningen

$h'(t) = k\sqrt{h(t)}$, der h måles i cm og tiden t i sekunder.

a) Løs differensialligningen.

b) Det viser seg at løsningen kan skrives slik: $h(t) = (C + \frac{k}{2}t)^2$.

Bruk initialbetingelsen $h(0) = 25$ [cm] til å bestemme C.

c) Hva er faktoren k i dette tilfellet, hvis det viser seg at det tar 60 sekunder å tømme tanken?

Formler:

Eksakte DL: (6.1)

Differensialligninger som kan løses direkte ved integrering:

$$y' = f(x) \quad \Leftrightarrow y = \int f(x)dx$$

Separable DL: (6.3)

Differensialligninger på formen: $\quad f(y)y' = g(x)$

Integrasjon og kjerneregel gir løsning:

$$\int f(y)y'dx = \int g(x)dx \Leftrightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx \Leftrightarrow F(y) = G(x) + C,$$

der $F'(y) = f(y)$ og $G'(x) = g(x)$

Lineære DL og integrerende faktor: (6.4)

Lineære differensialligninger på formen: $y' + p(x)y = q(x)$

$IF = e^{\int p(x)dx} = e^{P(x)}, \qquad$ der $P'(x) = p(x)$

Multiplikasjonsregel gir:

$$y'e^{P(x)} + ye^{P(x)}p(x) = q(x)e^{P(x)} \Leftrightarrow (ye^{P(x)})' = q(x)e^{P(x)} \Leftrightarrow$$
$$ye^{P(x)} = \int q(x)e^{P(x)}dx \Leftrightarrow y = e^{-P(x)}\int q(x)e^{P(x)}dx$$

Tidsbesparende triks:

Bruke produkt- og brøkregelen for derivasjon baklengs sparer oss ofte for en omvei innom integrerende faktor:

$$xy' + y = f(x) \Leftrightarrow (yx)' = f(x)$$

$$xy' - y = x^2f(x) \Leftrightarrow (\tfrac{y}{x})' = f(x)$$

$$xy' - y = y^2f(x) \Leftrightarrow (\tfrac{x}{y})' = -f(x)$$