R2 eksamen våren 2014. (19.05.2014)

Løsningsskisser

(Versjon 23.10.14)

Del 1 - Uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) $f(x) = \sin(u); \qquad u = 3x \qquad$ Kjerneregel: $f'(x) = f'(u)u'(x) = \cos(u)3 = 3\cos 3x$

b) $(e^{2x})' = 2e^{2x}$ med kjerneregel som i a)
Produktregel: $\quad g'(x) = 2e^{2x}\cos x + e^{2x}(-\sin x) = e^{2x}(2\cos x - \sin x)$

Oppgave 2

a) $\int 2x\sin(x^2)dx = \int u'\sin u\, dx = \int \sin u\,(u'dx) = \int \sin u\, du = -\cos u + C = C - \cos(x^2)$

(Eller: $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$
$\int 2x\sin(x^2)dx = \int 2x\sin u \frac{du}{2x} = \int \sin u\, du = -\cos u + C = C - \cos(x^2)$)

b) Ubestemt integral med delvis integrasjon:
$\int x\ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C =$
$\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$

$\int_1^e x\ln x\, dx = {}_1^e\left[\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1)\right] = \frac{e^2}{4}(2\ln e - 1) - \frac{1}{4}(2\ln 1 - 1) =$
$\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$

Oppgave 3

$f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x \qquad$ og $\qquad f''(x) = 4e^{2x} - 4e^x = 4e^x(e^x - 1)$

Vendepunkt når: $\quad f''(x) = 0$
$4e^x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ (umulig)$\vee e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

): $VP = (0, f(0)) \; = (0, -3)$

Oppgave 4

a) Kvotient: $\quad k = 1 - x$
Konvergensområde:
$-1 < 1 - x < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - x \wedge 1 - x < 1 \Leftrightarrow x < 2 \wedge 0 < x \Leftrightarrow 0 < x < 2$

b) $s(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}, \qquad 0 < x < 2$

$s(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

$s(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 3$ (Forkastes)$\Leftrightarrow$ Ingen løsning

(Vi ser at hvis $x = 3$, så blir rekken:
$s(x) = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots$
Rekken både oscillerer og får større og større ledd, så $x = 3$ gir divergens og kan aldri bli et endelig tall $\frac{1}{3}$.)

Oppgave 5

Normalvektor: $\vec{n} = [2, 1, -2]$ (Fra koeffisienten i ligningen.)

a) P innsatt i planets ligning:
$VS = 2 \cdot 3 + 4 - 2 \cdot 2 + 3 = 9 \quad \neq \quad HS = 0$
): P ligger ikke i α

b) ℓ har retningsvektor: $\vec{r_\ell} = \vec{n} = [2, 1, -2]$

$$[x, y, z] = \overrightarrow{OP} + t\vec{r_\ell} = [3, 4, 2] + t[2, 1, -2]$$

$$\Updownarrow$$

$$\ell : \left\{ \begin{array}{c} x = 3 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = 2 - 2t \end{array} \right\}$$

c) Skjæring når:
$2(3 + 2t) + (4 + t) - 2(2 - 2t) + 3 = 0 \Leftrightarrow$
$6 + 4t + 4 + t - 4 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow$
$9t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Skjæringspunkt: $S = \ell \cap \alpha = (3 + 2(-1), 4 - 1, 2 - 2(-1)) = (1, 3, 4)$

d) Da $\overrightarrow{SP} \parallel \vec{n}$ blir avstanden:

$$\left|\overrightarrow{SP}\right| = \|[3 - 1, 4 - 3, 2 - 4]\| = \|[2, 1, -2]\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

(Som er enklere enn å bruke avstandsformelen:

$$\left| \frac{2\cdot3+4-2\cdot2+3}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} \right| = \left| \frac{9}{3} \right| = 3 \text{)}$$

Oppgave 6

a) Avstand (x) fra topp- til nærmeste bunnpunkt: $\frac{T}{2} = 2 - 0 = 2 \Leftrightarrow T = 4$
): $c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

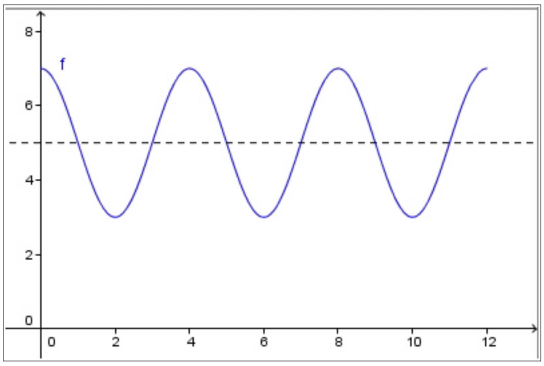
Avstand (y) fra topp- til bunnpunkt gir amplitude:
$2a = 7 - 3 = 4 \Leftrightarrow a = 2$

Gjennomsnittlig y-verdi for topp- og bunnpunkt gir likevektslinje:
$d = \frac{7+3}{2} = 5$

Toppunkt $(0, 7)$ ligger $\frac{T}{4} = 1$ til høyre for første skjæring med likevektslinje,
$f(x)$ er faseforskjøvet 1 til venstre: $\phi = \frac{\varphi}{c} = 1$

): $f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{2}(x+1)) + 5 = 2\sin(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}) + 5$ *QED*

b) Skissen bør ha tre hele svingninger da $[0, 12]$ inneholder 3 perioder.
Alle vendepunkter (skjæringer med likevektslinje) og ekstremalpunkter bør være rimelig nøyaktige. ($(0, 7), (1, 5), (2, 3), (3, 5), (4, 7), \ldots, (12, 7)$)



Oppgave 7

Kan bruke integrerende faktor eller separere:

$2 + 3y \neq 0$:

$$\frac{y'}{2+3y} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{y'}{2+3y}dx = \int 1dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{2+3y}dy = \int 1dx \Leftrightarrow \frac{1}{3}\ln|2+3y| = x + C_1$$

$$\ln|2+3y| = 3x + C_2 \Leftrightarrow |2+3y| = e^{3x}C_3 \Leftrightarrow 2+3y = C_4e^{3x}$$

Generell løsning: $y = Ce^{3x} - \frac{2}{3}$ $(2 + 3y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}$ dekkes av $C = 0$)

Initialbetingelse gir: $Ce^0 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C = 1$

Spesiell løsning: $y = e^{3x} - \frac{2}{3}$

Del 2 - Med hjelpemidler

Oppgave 1

a)
Må vise at punktene ikke ligger på linje.
Antar det motsatte: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow [-2, -1, -1] = k[-3, -1, -3] \Leftrightarrow$
$k = \frac{2}{3} \wedge k = 1 \wedge k = \frac{1}{3}$ Selvmotsigende!

): Punktene ligger ikke på linje.

b) Normalvektor:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ -2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix} = [2, -3, -1]$$

Bruker B som punkt i planet:

$$[x-2, y-2, z-0] \cdot [2, -3, -1] = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 - 3y + 6 - z = 0 \Leftrightarrow$$

): $\alpha : 2x - 3y - z + 2 = 0$

c) $V_{ABCT} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AT}\right| = \frac{1}{6}|[2, -3, -1] \cdot [-2, 2, 4t]| = \frac{1}{6}|-4 - 6 - 4t| =$
$\frac{1}{6}|-2(5 + 2t)| = \frac{1}{3}|5 + 2t|$

$V_{ABCT} = 3 \Leftrightarrow$
$\frac{1}{3}|5 + 2t| = 3 \Leftrightarrow |5 + 2t| = 9 \Leftrightarrow 5 + 2t = 9 \vee 5 + 2t = -9 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = -7$

Obs: Viktig å få med begge løsninger her!

(Tallverdiligninger er akkurat som andregradsligninger, de har som regel to løsninger: $|u(x)| = a \Leftrightarrow u(x) = -a \vee u(x) = a$)

Oppgave 2

Gjør b) først (for å få mer oversiktlig regning i a)):

$$x^2 - 2x + 1^2 + y^2 - 2y + 1^2 + z^2 - 6z + 3^2 = -2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 3^2$$

): Sentrum: $S = (1, 1, 3)$, Radius: $r = 3$

a) Setter inn på begge sider i ligning:

$VS = (2-1)^2 + (3-1)^2 + (5-3)^2 = 1 + 4 + 4 = 9$
$HS = 3^2 = 9$
): $P(2, 3, 5)$ ligger på kuleflaten

c) Planet har $\overrightarrow{SP}$ som normalvektor: $\vec{n} = [2-1, 3-1, 5-3] = [1, 2, 2]$
Bruker P som punkt i planet: $[x-2, y-3, z-5] \cdot [1, 2, 2] = 0 \Leftrightarrow$
$x - 2 + 2y - 6 + 2z - 10 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 18 = 0$

Oppgave 3

a)
Temperaturendring per time: $y'(t)$ [°C/t]
Differansen mellom kropps- og romtemperaur: $y - 22$ [°C]
Altså har vi proporsjonaliteten:

$$y' = -k(y - 22)$$

(y' er negativ fordi temperaturen er avtagende, og k må derfor være positiv.)

b)
Startemperaturn var 30°C, så vi har initialbetingelsen $y(0) = 30$.
Separerer: (Kunne også brukt integrerende faktor på $y' + ky = 22k$)
$y - 22 \neq 0$:

$\frac{y'}{y-22} = -k \Leftrightarrow \int \frac{y'}{y-22} dt = -k \int dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{y-22} dy = -k \int dt \Leftrightarrow$
$\ln|y-22| = -kt + C_1 \Leftrightarrow |y-22| = e^{-kt} C_2 \Leftrightarrow y = 22 + Ce^{-kt}$

$y - 22 = 0$: $y = 22$ dekket av tilfellet $C = 0$

): Generell løsning: $y = 22 + Ce^{-kt}$

Initialbetingelse: $22 + Ce^0 = 30 \Leftrightarrow C = 8$

): Spesiell løsning: $y = 22 + 8e^{-kt}$

c) $y(1) = 28 \Leftrightarrow 22 + 8e^{-k} = 28 \Leftrightarrow e^{-k} = 0.75 \Leftrightarrow k = -\ln 0.75 \approx 0.29$

$y = 22 + 8e^{-0.29t}$

d) $y(t) = 37 \Leftrightarrow 22 + 8e^{-0.29t} = 37 \Leftrightarrow e^{-0.29t} = 1.875 \Leftrightarrow t = \frac{\ln(1.875)}{-0.29} = -2.2$

): Drapet ble utført ca. 2 timer og 10 minutter før kl. 11:00,
dvs. ca. kl. 08:50

Oppgave 4

$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ er geometrisk med $a_1 = 1$ og kvotient $k = x$.

Konvergerer når $|k| < 1 \Leftrightarrow x \in \langle -1, 1 \rangle$: $S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-x}$ *QED*

b)
Derivasjon av venstre og høyre side i ligningen i a) gir:
Alle ledd på venstre side bruker $(x^n)' = nx^{n-1}$

Høyre side deriveres med kjerneregel og $u = 1 - x$;
$\frac{1}{1-x}' = u^{-1'} \cdot (1-x)' = -u^{-2}(-1) = u^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$
Vi får derfor:
$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}$ *QED*
c)
$x = \frac{1}{2}$ gir ligningen: $1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} \Leftrightarrow$
$1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots = 4$ *QED*
d)
$P(1)$:
VS blir første leddet: 1
HS blir $4 - \frac{1+2}{2^{1-1}} = 4 - \frac{3}{1} = 1$ *OK*!

Induksjonstrinnet: $P(n) \rightarrow P(n+1)$:
Må vise at summen av $n+1$ ledd blir: $S(n+1) = 4 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1-1}} = 4 - \frac{n+3}{2^n}$

$S(n+1) = S(n) + a_{n+1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} + \frac{n+1}{2^n} = 4 - (\frac{(n+2)2-(n+1)}{2^n}) =$
$4 - \frac{2n+4-n-1}{2^n} = 4 - \frac{n+3}{2^n}$ *OK*!
e)

d) viser at summen av n ledd blir $S(n) = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$
c) viser at den uendelige summen blir 4, altså må $\lim_{n\to\infty}(4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}) = 4 \Leftrightarrow$
$4 - \lim_{n\to\infty}(\frac{n+2}{2^{n-1}}) = 4 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(\frac{n+2}{2^{n-1}}) = 0 \quad QED$

Kommentarer:
Dette er litt bakvendt, normalt ville vi brukt $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+2}{2^{n-1}}) = 0$, som er opplagt, da nevneren er en eksponentialfunksjon og telleren en lineær funksjon, til å vise at summen av rekken blir

$$S = \lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty}(4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}) = 4 - \lim_{n\to\infty}(\frac{n+2}{2^{n-1}}) = 4 - 0 = 0$$

Hvis vi først kjenner formelen for $S(n)$ trenger vi ikke gjøre triksene i a) og b)....

På den annen side er trikset i a) og b) antagelig lettere å finne på enn formelen i d), hvordan kunne vi funnet den?

Viser hvordan dette kan gjøres, som en morsom illustrasjon av hvordan oppstillinger ofte løser denne type rekkesummer:
$S(n) = 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^{n-1}} =$

$$\begin{array}{cccccccl}
1 + & \frac{1}{2^1} + & \frac{1}{2^2} + & \ldots & + & \frac{1}{2^{n-1}} & + & \leftarrow\text{rad 1: } \frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2}-1} = 2(1 - \frac{1}{2^n}) \\
 & \frac{1}{2^1} + & \frac{1}{2^2} + & \ldots & + & \frac{1}{2^{n-1}} & + & \leftarrow\text{rad 2: } \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2^{n-1}}-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}) \\
 & & \frac{1}{2^2} + & \ldots & + & \frac{1}{2^{n-1}} & + & \leftarrow\text{rad 3: } \frac{1}{2^2}\frac{\frac{1}{2^{n-2}}-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}-1} = 2(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^n}) \\
 & & & & & \ldots & & \qquad\qquad \ldots \\
 & & & & & \frac{1}{2^{n-1}} & & \leftarrow\text{rad } n\text{: } \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} = 2(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n})
\end{array}$$

Så summerer vi uttrykkene til høyre for alle n radene:
$S(n) = 2(1 - \frac{1}{2^n}) + 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}) + 2(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^n}) + \ldots + 2(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}) =$
$2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} - (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n})) =$
$2(\frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2}-1} - \frac{n}{2^n}) = 2(2(1 - \frac{1}{2^n}) - \frac{n}{2^n}) = 4(1 - \frac{1}{2^n}) - \frac{2n}{2^n} =$
$4 - \frac{4}{2^n} - \frac{2n}{2^n} = 4 - \frac{4+2n}{2^n} = 4 - \frac{2+n}{2^{n-1}}$

Oppgave 5

a) Formelen for areal av sirkelsektor; $A = \frac{bue \cdot radius}{2}$, og definisjonene $v = \frac{bue}{radius}$,
gir oss: $F(v) = \frac{rv \cdot r}{2} = \frac{r^2}{2}v = \frac{10^2}{2}v = 50v$

b) $AB = CD = 2r\sin(\frac{v}{2})$, $\quad BC = AD = 2r\cos(\frac{v}{2})$

$$\begin{aligned}
T(v) &= \Delta_{ABC} + \Delta_{AOD} + F(v) = \frac{AB \cdot BC}{2} + \frac{AD \cdot \frac{AB}{2}}{2} + F(v) = \\
&\frac{2r\sin(\frac{v}{2})2r\cos(\frac{v}{2})}{2} + \frac{2r\cos(\frac{v}{2})r\sin(\frac{v}{2})}{2} + 50v = \\
&3r^2 \sin\frac{v}{2} \cos\frac{v}{2} + 50v = \\
&\frac{3}{2}r^2 \sin v + 50v = 150 \sin v + 50v = \\
&50(v + 3\sin v) \qquad QED
\end{aligned}$$

c)

Hva mener de med "Bestemme v grafisk":
Jeg regner med at de godtar å bestemme funksjonens maksimum i den grafiske/numeriske delen av GeoGebra med:

F(x)=50 (v+3 sin(v))
M=Ekstremalpunkt[F,1,2]

Som gir ekstremalpunktet M=(1.91,237)
): $T_{maks} = 237$, når $v = 1.91$ [rad]= 110°

Kommentar:
Men, egentlig er jo dette bare en vanlig numerisk løsning med kommandoer, enten man viser det grafisk eller ikke.
"Grafisk" ville det blitt hvis man lagde en glider v og en geometrisk konstruksjon og varierte v til arealet i den geometriske konstruksjonen ble størst mulig, men det ville jo tatt altfor mye tid, jeg håper det ikke var dette oppgaveforfatteren tenkte på.
Og, det raskeste hadde jo vært vanlig regning:

$T'(v) = 50 + 150\cos v$
$T'(v) = 0$ gir da $\cos v = -\frac{1}{3}$ og $v = 1.91$ direkte, kjapt og greit.

Men, da har man gjort det "ved regning" og ville fått trekk i vurderingen ...
Jeg håper de skjermper ordbruken fra og med våren 2015...og at de er mer åpne for metodefrihet enn denne oppgaveformuleringen gir uttrykk for...

Oppgave 6

a) $V(a) = \pi\int_1^a f^2(x)dx = \pi\int_1^a(\frac{1}{x})^2dx = \pi\int_1^a x^{-2}dx =$
$\pi\ {}_1^a[-\frac{1}{x}] = \pi(-\frac{1}{a} - (-\frac{1}{1}) = \pi(1 - \frac{1}{a})$

b) $I(a) = \int_1^a f(x)dx = \int_1^a \frac{1}{x}dx = {}_1^a[\ln x] = \ln a - \ln 1 = \ln a$

Hvis vi hadde projisert overflaten av halve omdreiningslegemet ned i xy-planet ville vi fått $2I(a)$ som åpenbart er mindre enn overflaten av halve omdreiningslegemet;

$\frac{1}{2}O(a) > 2I(a) \Rightarrow O(a) > 4I(a) \Rightarrow O(a) > I(a) \qquad QED$

c) $\lim_{a\to\infty} V(a) = \lim_{a\to\infty}\pi(1 - \frac{1}{a}) = \pi - \pi\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a} = \pi - 0 = \pi$

Volumet er altså endelig. (Så mannen på stigen vil kunne fylle Gabriels horn.)

$O(a) > I(a) \Rightarrow \lim_{a\to\infty} O(a) > \lim_{a\to\infty}(\ln a)$
Grenseverdien til høyre eksisterer ikke (går mot uendelig), å grenseverdien til venstre eksisterer heller ikke;
overflaten til Gabriels horn går mot uendelig, og mannen på figuren under til venstre vil aldri bli ferdig med å male Gabriels horn.