Fagdag 7 - Start kapittel 6 - Differensialligninger

Arbeidsark

Versjon: 11.04.09 - Var dessverre en del trykkfeil...

Plan/innhold:

- Innledning
- Terminologi (6.1)
  - Hva en differensialligning, orden, grad og løsning er
- Initialbetingelser (6.2)
- Retningsdiagram (6.2)
- Løsningsmetoder (6.3)
- Vedlegg: 8 Praktiske gjennomgangseksempler med utledning av tilhørende differensialligninger.

Innledning

Dere må ta med datamaskin, da vi skal bruke både GeoGebra og et annet program som ligger på nettet.
På fagdagen jobber dere med dette arbeidsarket, da jeg ønsker å gjøre ting litt annerledes enn i boken:

- Introdusere praktiske eksempler (Se Vedlegget til slutt!) med en gang og bruke disse som eksempler parallelt gjennom 6.1 til 6.5.
  Dette er for å knytte alle formler og teknikker til gjennomgangseksempler det er lett å huske istedenfor til eksempler som ikke er tilknyttet anvendelser.
- Gå igjennom noen ekstra løsningsmetoder, triks og lure variabelskifter.
  Dette er for å gi dere enda mer trening og forståelse av variabelskifteteknikken dere lærte i forbindelse med integrasjon i kapittel 5. Dessuten vil disse triksene løse noen eksempler som boken ikke har løst eller som man ellers må bruke datamaskin for å løse. Jeg håper også at de kanskje "treffer" mulige eksamensoppgaver oppgavenemden kan finne på å gi...
- Ta vare på dette arket, vi vil komme tilbake til det senere, og det vil være et godt hjelpemiddel til eksamen!

Terminologi:

Hva er en differensialligning:

En ***differensialligning*** er en ligning med en funksjon (y), dens deriverte $(y', y'', \ldots)$ og den uavhengige variabelen x.

$$xy' + y = x^2$$

Differensialligningens ***orden*** er den høyeste deriverte som forekommer i ligningen. Ligningen i eksemplet over er altså av ***Første orden.***

En første ordens, lineær differensialligning er ***separabel*** hvis vi kan skrive den på formen: $f(y)y' = g(x)$, dvs. med alle y –ledd til venstre og alle x –ledd til høyre i ligningen.

En differensialligning er lineær hvis det ikke opptrer noen potenser av y –er (deriverte eller ikke).

Lineær: $y'' + x^2y' + e^xy = x$ Ulineære: $yy' + x^2y = e^x, \; y' + 3y^2 = x$

Eksempler:

De praktiske eksemplene refererer til vedlegget til slutt.

Det er ikke meningen at dere skal huske alle disse eksemplene eller klare å løse dem nå.

Poenget er å introdusere dem, slik at dere gjenkjenner dem når vi kommer tilbake til dem senere.

Differensialligning:	**Orden:**	**Løsning:**	**Praktisk eksempel:**
$y' = ky$	1	$y = Ce^{kx}$	Populasjonsvekst. (Eks. 3 s. 284)
$y' = -ky$	1	$y = Ce^{-kx}$	Radioaktiv nedbrytning. (Eks. 8 s. 295)
$y'' + 3y' - 2y = x$	2	Senere, se 6.6:	(Svingninger, 2dre ordens diff. ligning.)
$h' = -k\sqrt{h}$	1	$h(t) = (C - \frac{k}{2}t)^2$	Toricelli: Tømming av tank.
$T' = -k(T - T_{omg})$	1	$T = T_{omg} + Ce^{-kt}$	Temperaturfall i en kaffekopp. (642 s. 402)
$y' = u - \frac{g}{V}y$	1	$y = \frac{Vu}{g} - Ce^{-\frac{g}{V}t}$	Utslipp i fjellvann eller tank. (Eks. 4 s.284)
$mg - kv^2 = mv'$	1	$y = \sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{1+Ce^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{1-Ce^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}$	Fritt fall med luftmotstand(Eks. 7 s. 291)
$y' = ky(N - y)$	1	$y = \frac{N}{1+Ce^{-kNt}}$	Populasjonsvekst med begrensning. (s. 288)
$y' = ky(B - ty)$	1	$y = \frac{B}{t-\frac{1}{kB}+Ce^{-kBt}}$	Utvikling av epidemi (Siste i eks. 4 s. 267)

Legg merke til at den uavhengige variabelen ofte er t for tid.

Hva er en løsning av en differensialligning:

En løsning av en differensialligning er en funksjon y som passer i ligningen.

På prøven hadde vi eksemplet: $xy' + y = x^2$

Spesielle løsninger: $y = \frac{x^2}{3}, \qquad y = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x}$

Vi viser at $\frac{x^2}{3}$ er en løsning:

$VS = xy' + y = x \cdot \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{3} = \frac{3x^2}{3} = x^2$

$HS = x^2$

I og med at integrasjon er nødvendig for å løse en differensialligning, dukker det opp integrasjonskonstanter:

Generell løsning: $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$

Generelle løsninger inneholder ***alle*** løsningene til differensialligningen!

Oppgaver:

a) Vis at $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$ er løsning i $xy' + y = x^2$

b) Vis at $y = Ce^{kx}$ er løsning av $y' - ky = 0$

c) Vis at $y = Ce^{-kx}$ er løsning av $y' + ky = 0$

d) (608 b) Vis at $y = A\sin(kx + \varphi)$ er løsning av $y'' + k^2y = 0$

e) Vis at $h(t) = (C - \frac{k}{2}t)^2$ er løsning av $h' = -k\sqrt{h}$

f) Vis at $T = T_{omg} + Ce^{-kt}$ er løsning av $T' = -k(T - T_{omg})$.

g) Vis at $y = \frac{Vu}{g} - Ce^{-\frac{g}{V}t}$ er løsning av $y' = u - \frac{g}{V}y$

Initialbetingelser:

I praktiske eksempler må vi bestemme konstantene (C) vi har fått i løsningene.
Dette gjøres med initialbetingelser:

Eksempel:

I en dyrepopulasjon får 10% av dyrene 2 avkom i gjennomsnitt hvert år.
Vi lager en differensialligning:
Endring Δy i populasjonen y i en tidsperiode Δt: $\Delta y = y \cdot \frac{10}{100} \cdot 2\Delta t \Rightarrow y' = 0.2y$
Vi vil senere lære teknikker for å finne løsningen $y = Ce^{0.2t}$

Hvis vi vet at populasjonen er 1000 når $t = 0$, har vi ***initialbetingelsen***:

$$y(0) = 1000$$

som gir oss: $1000 = Ce^{0.2\cdot 0} \Leftrightarrow C = 1000$

Altså har vi den spesielle løsningen: $y = 1000e^{0.2t}$, t[år]

Oppgaver:

I disse oppgavene kan du bruke GeoGebra til å studere hvordan løsningene varierer med C hvis du lager en glider/skyver av C.

a) En radioaktiv isotop brytes ned ved at 0.1% av massen brytes ned per tidsenhet($1s$).
Vi har altså at endringen i masse pr tidsenhet er: $m' = -0.001m$

Løsningen er $m = Ce^{-0.001t}$

Finn den spesielle løsningen når vi starter med 0.5 kg av isotopen.

b) Endringen i temperatur pr tidsenhet (min) for en kaffekopp er ifølge Newton proporsjonal med
temperaturforskjellen fra omgivelsene (20 grader):
$T' = -0.005(T - 20)$
Løsningen her er $T = 20 + Ce^{-0.005t}$

Finn den spesielle løsningen hvis temperaturen i utgangspunktet er 80 grader.

c) I den lille byen Renvik har familiene Rikerud og Grisk nettopp startet en kjemisk fabrikk, Splux AS, som produserer innsektmidlet KillAll. All produksjon eksporteres til fattige utviklingsland, da innsektmidlet har visse bivirkninger også for mennesker. Splux AS vil hvert år slippe ut 1200 kg gift i den tilliggende idylliske innsjøen Renviksvannet, da de ikke er interesserte i unødige utgifter på sikker destruering av produksjonsavfall. Volumet av Renviksvannet er $V = 2000000\ \mathrm{m}^3$, og gjennomstrømmingen er hvert døgn $5000\ \mathrm{m}^3$.

Vi vil finne giftmengden i vannet som funksjon av tiden. (y)

Endring i giftmengde pr. tidsenhet Δt: $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1200\ \text{kg}}{365\ \text{døgn}} - \frac{y\ \text{kg}}{2000000\ \text{m}^3} \cdot \frac{5000\text{m}^3}{1\text{døgn}} \Rightarrow$

$y' = 3.29 - 0.0025y$

Løsningen her er $y = 1316 + Ce^{-0.0025t}$

Finn den spesielle løsningen hvis giftmengden i Renviksvannet i utgangspunktet er 0 kg.

Hvor mye gift vil det være i sjøen når det har gått lang tid?

d) En fallskjemhopper med utstyr har massen m og luftmotstanden er proporsjonal med kvadratet av hastigheten kv^2.
Newtons andre lov sier at kraft = masse • aksellerasjon, og vi får derfor differensialligningen

$$mg - kv^2 = ma \Leftrightarrow mg - kv^2 = mv'$$

da akselerasjonen er den deriverte av hastigheten $a = v'$.
Denne differensialligningen har løsningen

$$y = \sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{1 + Ce^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t}}{1 - Ce^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t}}$$

Med $m = 120$ Kg, $k = 100\ \mathrm{Ns^2/m^2}$ og $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ får vi:

$$y = 3.43\frac{1 + Ce^{-5.72t}}{1 - Ce^{-5.72t}}$$

Vi antar at hopperen har startfarten $v(0) = 90$km/t= 25m/s idet fallskjemen utløses.
Finn den spesielle løsningen i dette tilfellet.
Hva er farten idet hopperen når bakken? (t stor)

Retningsdiagrammer

Når differensialligningene kan skrives på formen $y' = f(x,y)$, kan vi lage såkalte retningsdiagrammer for løsningene, selvom vi ikke har funnet løsningen.

I et punkt $P = (x,y)$ på løsningskurven er stigningstallet til tangenten $y' = f(x,y)$.
Vi kan derfor tegne mange små tangenter til kurven ved å regne ut y' for mange verdier av x og y.
Se figur 271 i boken.

Differensialligningen $xy' + y = x^2$ kan feks. skrives som $y' = \frac{x^2 - y}{x} = x - \frac{y}{x}$.

Oppgaver:

Gå ut på nettet og bruk programmet som ligger på http://www.math.psu.edu/dlittle/java/calculus/slopefields.html

til å lage retningsdiagram for differensialligningene:

a) $xy' + y = x^2$ (Eksempel fra prøve)

b) $h' = -0.0134\sqrt{h}$ (Toricellis tømming av tank)
(I programmet må du skrive $-0.0134 * sqrt(y)$)

c) $T' = -0.005(T - 20)$ (Newtons avkjølingslov)

d) $y' = 3.29 - 0.0025y$ (Gift i Renviksvannet)

Løsningsmetoder:

Det vi har ventet på! Hvordan finner vi egentlig løsningene til disse differensialligningene?
Det enkle svaret: Ved hjelp av integrasjon, men, det krever ofte noen omforminger og triks for å få noen integral vi kan løse...

Metode I - Eksakte differensialligninger (6.2)

Hvis ligningen er på formen $y' = f(x)$ istedenfor den mer generelle $y' = f(x, y)$,
kan vi finne løsningen ved å integrere direkte:

$$y = \int f(x)dx$$

Eksempel: $y' = x + \cos(x) \Rightarrow y = \int(x + \cos(x))dx = \frac{x^2}{2} + \sin(x) + C$

Enkelt og greit, vi bruker ikke mer tid på det :-)

Metode II - Separable differensialligninger (6.3)

Hvis ligningen er på formen $f(y)y' = g(x)$ er den såkalt separabel, med bare y-er til venstre og bare x –er til høyre.

Hvis vi integrerer på begge sider får vi: $\int f(y)y'dx = \int g(x)dx$

Her gjenkjenner vi kjerneregelen! $y'dx = dy$!
Så vi kan gjøre variabelskifte på venstre side fra x til y:

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx$$

og får da

$$F(y) = G(x) + C, \qquad \text{der } F'(y) = f(y) \text{ og } G'(x) = g(x)$$

Etter å ha innsett dette gjør vi i praksis slik:

$y' = -k\sqrt{y}$ (Toricellis tømming av tank)

$$\frac{dy}{dx} = -k\sqrt{y} \Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = -kdx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int -kdx \Leftrightarrow$$
$$2\sqrt{y} = -kx + D \Leftrightarrow y = (\tfrac{D}{2} - \tfrac{k}{2}x)^2 = y = (C - \tfrac{k}{2}x)^2$$

Oppgaver:

Løs differensialligningene:

a) $y' - ky = 0$

b) $T' = -k(T - T_{omg})$

c) $y' = 3.29 - 0.0025y$

Metode III: Produktsetningen

Produktsetningen for derivasjon kan brukes baklengs!

Fra prøven 18.03.09: $xy' + y = x^2$

Hvis vi skriver den som $y'x + y1 = x^2$
gir produktsetningen oss $(yx)' = x^2$

og da kan vi integrere begge sider $yx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

og får løsningen $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$

Når vi først er igang:

Hva med $xy' + ny = f(x)$?

Multipliserer med x^{n-1} og får: $x^n y' + nx^{n-1}y = f(x)x^{n-1}$

Igjen gir produktsetningen $(yx^n)' = f(x)x^{n-1}$

som forhåpentligvis kan integreres: $yx^n = \int f(x)x^{n-1}dx$

og dermed gir løsningen: $y = x^{-n}\int f(x)x^{n-1}dx$

Eksempel: $xy' + 4y = x^2$

Multipliserer med $x^{4-1} = x^3$: $x^4y' + 4x^3y = x^5$

Integrerer: $x^4y = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$

Og får: $y = \frac{x^2}{6} + \frac{C}{x^4}$

Utfordring:

Da må vel også brøkregelen $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ kunne brukes baklengs?

Eller mer relevant for oss: $\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{y'x-y}{x^2}$

Lag en regel/metode for å løse ligninger på formene:

$$xy' - y = f(x)$$

og

$$xy' - ny = f(x)$$

Vedlegg:

Noen praktiske anvendelser som vi bruker som gjennomgangseksempler i kapittel 6.1-6.5

Eksponentiell vekst som enkel populasjonsutvikling:

(Eksempel side 284 og side 287.)

En populasjon har en endringshastighet (fødsler-døde)/tidsenhet som naturlig vil være proporsjonal med populasjonen.

Dette gir:

$$y' = ky \qquad \text{med løsning } y = Ce^{kx}$$

Radioaktiv nedbrytning:

(Eksempel 8 side 295.)

Tilsvarende vil massen av en radioaktivitet avta og ha en negativ endringshastighet proporsjonal med den massen som

er igjen:

$$y' = -ky \qquad \text{med løsning } y = Ce^{-kx}$$

Eksponentiell vekst med bæreevne:

(Eksempel 5 side 288.)

Istedenfor $y' = ky$ har vi her en maksimal bæreevne, det vil si et maks antall individer og det kan

modelleres slik:

$$y' = ky(N-y) \qquad \text{med løsning } y = \frac{N}{1+Ce^{-kNt}}$$

Vi ser av differensialligningen at veksten (y') blir liten hvis y nærmer seg N.

Dette medfører at y flater ut med $y = N$ som asymptote.

Når $t \to \infty$ vil $Ce^{-kNt} \to 0$ og vi ser at $y \to N$.

Dette kalles ***logistisk*** vekst.

Utvikling av epidemi:

(Eksempel 4 side 267, tredje og siste del. Antagelig godt utenfor pensum...)

En slektning av logistisk vekst er:$y' = k\,y\,(B - t\,y)$

Poenget her er at endringen i antall smittede er
proporsjonal med antall smittede, begrenset av antall individer i populasjonen,
møter og smittesituasjoner (B) og at de fleste blir friske etterhvert som tiden går (t).

Ser vi på løsningen $y = \frac{B}{t - \frac{1}{kB} + Ce^{-kBt}}$
ser vi at $y \to 0$ når $t \to \infty$, da $Ce^{-kBt} \to 0$ og $\frac{B}{t - \frac{1}{kB}} \to 0$ når $t \to \infty$.

Fallskjermhopp og fritt fall med luftmotstand

(Eksempel 7 side 291.)

Newtons andre lov sier at kraft = masse • aksellerasjon,
og vi får derfor: Tyngde-luftmotstand=masse•aksellerasjon
Med akselerasjon som den deriverte av hastigheten får vi differensialligningen

$$mg - kv^2 = mv'$$

hvis luftmotstanden er proporsjonal med kvadratet av hastigheten.
Løsning:

$$y = \sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{1 + Ce^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t}}{1 - Ce^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t}}$$

(Hvis proporsjonal, som boken regner med i eksempel 7 side 291, får vi isteden

$$mv' = mg - kv$$

som ofte brukes i lærebøker, da den er enklere å løse, men den er mindre realistisk i virkeligheten.)

Newtons avkjølingslov:

(Oppgave 642 side 402.)

Endringen i temperatur pr tidsenhet er ifølge Newton proporsjonal med temperaturforskjellen fra omgivelsene, og vi har derfor differensialligningen:

$$T' = -k(T - T_{omg})$$

Løsning:

$$T = T_{omg} + Ce^{-kt}$$

Utslipp i tank eller innsjø:

(Eksempel 4 side 284.)

I den lille byen Renvik har familiene Rikerud og Grisk nettopp startet en kjemisk fabrikk, Splux AS, som produserer innsektmidlet KillAll. All produksjon eksporteres til fattige utviklingsland, da innsektmidlet har visse bivirkninger også for mennesker. Splux AS vil hvert år slippe ut 1200 kg gift i den tilliggende idylliske innsjøen Renviksvannet, da de ikke er interesserte i unødige utgifter på sikker destruering av produksjonsavfall.

Volumet av Renviksvannet er $V = 2000000\ \mathrm{m}^3$, og gjennomstrømmingen er hvert døgn $5000\ \mathrm{m}^3$.

Vi vil finne giftmengden i vannet som funksjon av tiden. (y)

Endring i giftmengde pr. tidsenhet Δt: $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1200 \text{ kg}}{365 \text{ døgn}} - \frac{y \text{ kg}}{2000000 \text{ m}^3} \cdot \frac{5000\text{m}^3}{1\text{døgn}}$

Generelt, med utslipp $u = \frac{1200 \text{ kg}}{365 \text{ døgn}}$

og gjennomstrømming $g = \frac{5000\text{m}^3}{1\text{døgn}}$

får vi:

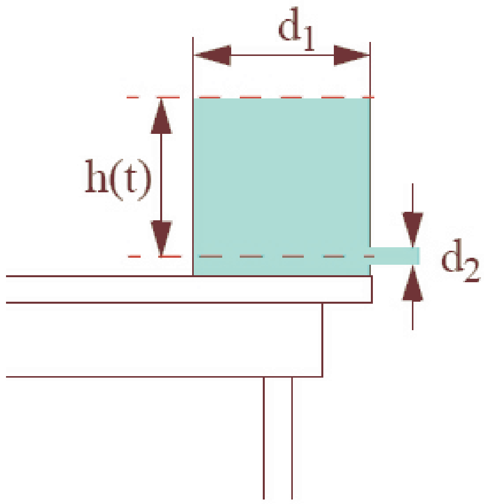
$$y' = u - \frac{g}{V}y$$

Løsning:

$$y = \frac{Vu}{g} - Ce^{-\frac{g}{V}t}$$

Toricellis tømming av vanntank:

(Fra time tidligere i våres.)



I et lite tidsrom Δt vil volumet i flasken avta med $\Delta V = \Delta h \cdot \pi \frac{d_1^2}{4}$
som er like volumet som passerer ut av det lille hullet: $\Delta V = \pi \frac{d_2^2}{4} v\Delta t$ (Hastighet v)
Altså har vi ligningen:

$$\Delta h \cdot \pi \frac{d_1^2}{4} = \pi \frac{d_2^2}{4} v\Delta t$$

Eller etter forkorting:

$$\Delta h \cdot d_1^2 = d_2^2 v\Delta t$$

Potensiell høydeenergi går over i kinetisk energi, så vi har: $\Delta mgh = \frac{1}{2}\Delta mv^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}$
Setter vi inn $v = \sqrt{2gh}$ i høyresiden av ligningen, får vi:

$$\Delta h \cdot d_1^2 = d_2^2 \sqrt{2gh}\, \Delta t$$

Differensialligningen er da grenseverdien av denne ligningen:

$$h' = (\frac{d_2}{d_1})^2 \sqrt{2g}\,\sqrt{h}$$

Eller enklere:

$$h' = k\sqrt{h}$$