Heldagsprøve

Matematikk - R2

04. mai 2009

Tid: 09.00-14.00

Del 1 leveres 11.00

Del 2 leveres 14.00

Hjelpemidler:

Del 1 (2 timer): **Skrivesaker**

Del 2 (3 timer): **Alle, unntatt andre personer.**

Faglærer: H-P Ulven

Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonen $f(x) = x^2 \sin x$

b) Deriver funksjonen $f(x) = 3(\ln(2x) + 1)^2$

c) Gitt funksjonen $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$
Finn eventuelle nullpunkter, ekstremalpunkter og vendepunkter.

d) Bestem integralet $\int \frac{x+3}{x^2-1}dx$

e) Finn summen av den uendelige rekken: $7 + 1.4 + 0.28 + 0.056 + \ldots$

f) Vinkelen v ligger i 4de kvadrant og $\tan v = -\frac{1}{3}$.
Finn ved regning eksakte verdier for $\sin v$, $\cos v$ og $\cos 2v$.

g) Vi har funksjonen $f(x) = \tan(\frac{x}{2})$

1) Vis at $f'(x) = \frac{1}{1+\cos x}$

2) Regn ut $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\cos x}dx$

3) Løs differensialligningen $y' + y' \cos x - y = 0$

h) Løs differensialligningen $4y'' + 4y' + 17y = 0$
i) En rekke er gitt ved at $a_1 = 1$ og $a_{n+1} = a_n + 2n$, der $n \in \mathbb{N}$.

1) Bevis med induksjon at det generelle leddet er $a_n = n^2 - n + 1$

2) Differansefølgen $d_n = a_{n+1} - a_n$ blir $d_n = 2n$.
Forklar hvorfor $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_n$.

3) Bruk 2) til å vise at $a_n = n^2 - n + 1$

Del 2

Oppgave 2

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 4\sin x + 4\sin x\cos x, \qquad x \in [0, 2\pi]$$

a) Tegn grafen til $f(x)$.

b) Finn nullpunktene til funksjonen

c) Bruk $f'(x)$ til å finne eventuelle topp-, bunn- og terrassepunkter på grafen til $f(x)$.

d) Finn arealet gitt av det bestemte integralet $\int_0^{\pi} f(x)dx$.

Oppgave 3

I en pyramide $ABCDT$ er grunnflaten firkanten $ABCD$ og toppunktet T.
Pyramiden er lagt inn i et 3-dimensjonalt koordinatsystem slik at
$A = (0,0,0)$, $B = (4,0,0)$, $C = (4,4,0)$ og $D = (0,4,0)$.
Sidekanten CT står vinkelrett på grunnflaten og har lengden $2\sqrt{6}$.

a) Vis at $ABCD$ er et kvadrat.

b) Finn koordinatene til T.

c) Regn ut vinkelen mellom sidekanten AT og grunnflaten.

d) Vis at planet α gjennom B, D og T har ligningen $3x + 3y - \sqrt{6}z - 12 = 0$

e) Regn ut vinkelen mellom α og xy –planet.

f) En linje n går gjennom C og står vinkelrett på planet α.
Sett opp en parameterfremstilling for linjen n.

g) Regn ut avstanden fra C til planet α.

h) n skjærer planet α i F. Finn koordinatene til F.

i) Hva er avstanden mellom linjen n og en linje gjennom A og B?

Oppgave 4

En dyrebestand omfatter i dag ($t = 0$) 6000 dyr.
Utviklingen av dyrebestanden er gitt ved differensialligningen

$y' = k(B - y)(y - A)$ [antall dyr], der t er tid i år.

som er en modifikasjon av den vanlige differensialligningen for logistisk vekst.
Her er bæreevnen $B = 11000$, mens $A = 2000$ er en tilsvarende nedre grense
for hvor lav bestanden kan bli før den risikerer å dø ut.
Gitt: $k = 0.00001[\frac{1}{dyr \cdot år}]$

a) Hva er vekstfarten i dyrebestanden i dag?

b) Hva er vekstfarten i dyrebestanden når den har nådd 8000 dyr?

c) Bruk delbrøkoppspaltning til å løse differensialligningen.

d) Hvor lang tid ville det ha tatt før bestanden døde ut hvis den var på 1900 dyr i utgangspunktet?