R2 Eksamen høsten 2014 (28.11.14)

Løsningsskisser

Versjon: 23.05.16 (Rettet feil i del 2 i oppgave 2)

Del I - Uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Kjerneregel: $f(x) = 2\cos u, \qquad u = 3x$
$f'(x) = -6\sin(3x)$

b) Produktregel: $g'(x) = 5e^x\sin(2x) + 5e^x\cos(2x)2 = 5e^x(\sin(2x) + 2\cos(2x))$

Oppgave 2

a) $\int(x^3 - 2x)dx = \frac{x^4}{4} - x^2 + C = \frac{x^2}{4}(x^2 - 4) + C$

b) Delvis integrasjon: $\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx =$
$\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

$$\int_1^3 x\ln x dx = {}_1^e\Big[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2\Big] = \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{e^2}{4} - \left(\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$$

Oppgave 3

a) Integrerende faktor: $IF = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$
$(ye^{-2x})' = 3e^{-2x}$
$ye^{-2x} = \frac{3}{-2}e^{-2x} + C \Leftrightarrow y = Ce^{2x} - \frac{3}{2}$ (Generell løsning)

$y(0) = \frac{5}{2}$ gir: $\frac{5}{2} = Ce^0 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = 4$
): Spesiell løsning: $y = 4e^{2x} - \frac{3}{2}$

b) Stigningstall fra differensialligningen: (Sparer en derivering!)
$y' = 3 + 2y \Rightarrow y'(0) = 3 + 2\frac{5}{2} = 8$

Ett-punkts-formelen: $y - \frac{5}{2} = 8(x - 0) \Leftrightarrow y = 8x + \frac{5}{2}$

Oppgave 4

$\overrightarrow{AB} = [0, -6, 1], \qquad \overrightarrow{AC} = [6, -6, -1]$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & -6 & 1 \\ 6 & -6 & -1 \end{vmatrix} = [12, 6, 36] = 6[2, 1, 6]$$

Velger normalvektor: $\vec{n} = [2, 1, 6]$

a)
Planet α: $[x, y-6, z-6] \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x, y-6, z-6] \cdot [2, 1, 6] = 0 \Leftrightarrow$

α : $2x + y + 6z - 42 = 0$

b)
$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AO} = k[0, -6, -6]$

Volum tetraeder:
$\frac{|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AP}|}{6} = 42 \Leftrightarrow \qquad \frac{|6[2,1,6] \cdot [0,-k,-k]6|}{6} = 42 \Leftrightarrow$
$\frac{36|-7k|}{6} = 42 \Leftrightarrow -7k = \pm 7 \Leftrightarrow k = \pm 1$

$k = -1$: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = [0, 6, 6] - [0, -6, -6] = [0, 12, 12]$

$k = 1$: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = [0, 6, 6] + [0, -6, -6] = [0, 0, 0]$

): $P = (0, 0, 0)$ eller $P = (0, 12, 12)$

Oppgave 5

a) $g(2) = \int_0^2 f(x)dx = 2 \cdot 4 = 8$ (Rektangel under kurven)
$g(3) = \int_0^3 f(x)dx = 8 + \frac{1 \cdot 4}{2} = 10$ (Rektangel pluss trekant under kurven)

Etter $t = 3$ blir tillegg til integralet negativt fordi $f(x)$ ligger under x-aksen,
så $g(t)$ vil derfor avta etter $t = 3$, og derfor aldri bli større enn $g(3) = 10$.

b) $g(t)$ har to nullpunkter: $t = 0$ eller $t = 6$.
(Første når integralet/arealet er null og det andre når arealet under og over x-aksen kansellerer hverandre ut.)

$t \in \langle 6, 9]$ gir derfor negative verdier, da arealet under x-aksen i dette intervallet er større enn det over.

Oppgave 6

Les av og marker i figuren:
Likevektslinje: $d = 5$
Amplitude: $A = \frac{\max - \min}{2} = \frac{7-3}{2} = 2$
Periode: $T = 2.79 - (-0.35) = 3.14$
$\Rightarrow c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3.14} \approx 2.00$
Faseforskyvning: $\phi = 2$ (eller -1.14)
$\Rightarrow \varphi_1 = c\phi = 2(2) = 4$ eller $2(-1.14) = -2.28$

): $f(x) = 2\sin(2x + 2.28) + 5$ (Vanlig å velge den minste)
(eller $f(x) = 2\sin(2x - 4) + 5$)

b) Bare faseforskyvning som er forskjellig:
$\varphi_1 = c\phi = 2(2.79) = 5.58$ eller $2(-0.35) = -0.70$, slik at vi får:
$f(x) = 2\cos(2x + 0.70) + 5$ (eller $f(x) = 2\cos(2x - 5.58) + 5$)

Oppgave 7

Skal vise at formelen for produktet er: $P(n) = \frac{1}{n+1}$
Leddene er $p(n) = 1 - \frac{1}{n+1}$

$n = 1$:

$p(1) = 1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$P(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ *OK*!

Fra n til $n + 1$:

Må vise at $P(n+1) = \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2}$, hvis vi antar at $P(n)$ er riktig for n.

$$P(n+1) = P(n) \cdot p(n+1) = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)+1}\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) =$$
$$\frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n+2}{n+2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2} \quad OK!$$

Del 2 - Med hjelpemidler

a) Kvotient: $k = \frac{a_2}{a_1}$
Sum: $S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{a_1}{1-\frac{a_2}{a_1}} = \frac{a_1 a_1}{a_1 - a_2}$ *QED*

b) Sum kvadrater: $6^2 + 3^2 + (\frac{3}{2})^2 + \ldots$
Kvotient: $k = \frac{1}{4}$ (Alle sider halveres hver gang, arealet kvadreres...)
$S = \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} = \frac{6^2 6^2}{6^2 - 3^2} = 48$

c) Grønne trekanter er alle halvparten av de blå kvadratene, så alle ledd blir halvparten av leddene i b), og dermed også summen S:

$$\frac{6^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{(\frac{3}{2})^2}{2} + \ldots = 18 + \frac{9}{2} + \frac{9}{8} + \ldots$$ (Geometrisk med kvotient $k_t = \frac{1}{4}$)

$S = \frac{18^2}{18 - \frac{9}{2}} = 24$ (Naturlig nok...)

d) Legger vi sammen grønn trekant og blå trekant på hvert nivå får vi et trapes med areal som er $(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$ av tilsvarende kvadrat. Summerer vi alle trapesene, får vi derfor en sum er $\frac{3}{2}$ av summen av kvadrater.
Summen er hele trekanten, som har areal: $\frac{12 \cdot 12}{2} = 72$

Sum kvadrater gitt av: $K\frac{3}{2} = 72 \Leftrightarrow K = \frac{72 \cdot 2}{3} = 48$
Sum trekanter er halvparten, altså 24, som i c).

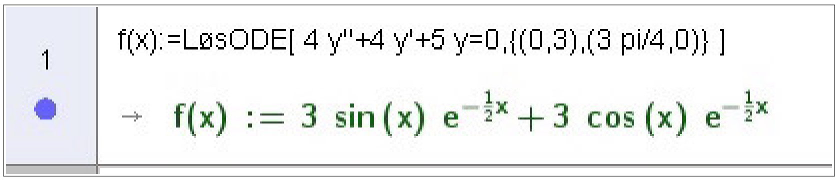
Oppgave 2

a) Karakteristisk ligning: $4r^2+4r+5=0$

$$r=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 4\cdot 5}}{2\cdot 4}=\frac{-4\pm\sqrt{-4\cdot 16}}{8}=-\frac{1}{2}\pm i$$

Generell løsning: $y=e^{-\frac{1}{2}x}(C\sin x+D\cos x)$

b) Her sparer man tid med å bruke CAS:



(Legg merke til at lister med punkt gir initialbetingelsene
$y(0)=3,\ y(\frac{3\pi}{4})=0$
Uten krøllparentesene, ville vi løst med initialbetingelsene
$y(0)=3,\ y'(\frac{3\pi}{4})=0$!)

Spesiell løsning: $y=e^{-\frac{x}{2}}(3\cos x-\sin x)$

Manuelt blir det *mer arbeid*:

$y(0)=3$:

$$3=e^0(C\sin 0+D\cos 0)\Leftrightarrow D=3$$

): $y=e^{-\frac{x}{2}}(C\sin x+3\cos x)$

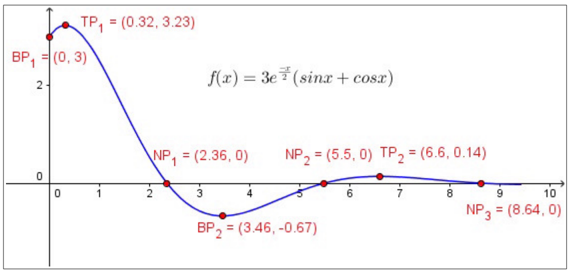
$y(\frac{3\pi}{4})=0$:

$$0=e^{-\frac{3\pi}{8}}(C\sin\frac{3\pi}{4}+3\cos\frac{3\pi}{4})\Leftrightarrow 0=C\frac{1}{\sqrt{2}}+3(-\frac{1}{\sqrt{2}})\Leftrightarrow C=3$$

): Spesiell løsning: $y=e^{-\frac{x}{2}}(3\sin x+3\cos x)$

c) I grafdelen av GeoGebra legger vi inn:
g(x):= f(x), 0<=x<3 pi

d) Nullpunkter og topp- og bunnpunkter søker vi opp i grafdelen med kommandoene:
NP_1:=Nullpunkt[f,2,3]
NP_2:=Nullpunkt[f,5,6]
NP_3:=Nullpunkt[f,8,9]
BP_1:=(0,f(0)) (***Endepunkt*!**)
TP_1:=Ekstremalpunkt[f,0,1]
BP_2:=Ekstremalpunkt[f,3,4]
TP_2:=Ekstremalpunkt[f,6,7]



Null-punkter: $(2.36, 0),\ (5.50, 0),\ (8.64, 0)$
Topp-punkter: $(0.322, 3.23),\ (6.60, 0.140)$
Bunn-punkter: $(0.00, 3.00),\ (3.46, -0.672)$

(Også her blir det mer arbeid og muligheter for feil manuelt:
Nullpunkter:
$\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \qquad (\cos x \neq 0)$
$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$
): $(2.36, 0),\ (5.50, 0),\ (8.64, 0)$

Ekstremalpunkter: $y' = 0$ gir derivasjon og enda mer arbeid...)

Oppgave 3

a) I xy-planet har vi geometrisk:

$$x_D = AD\cos(135^\circ) = 4\sqrt{2}\,(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = -4$$
$$y_D = AD\sin(135^\circ) = 4\sqrt{2}\,\tfrac{\sqrt{2}}{2} = 4$$
$$z_D = 0$$

): $D = (-4, 4, 0) \qquad QED$

b) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$
$[4, 0, 0] + \frac{1}{2}[4, 0, 0] + [-4, 4, 0] = [2, 4, 0]$
$\Leftrightarrow C = (2, 4, 0) \qquad QED$

c) $\overrightarrow{TB} = [4, 0, -4], \qquad \overrightarrow{TD} = [-4, 4, -4]$

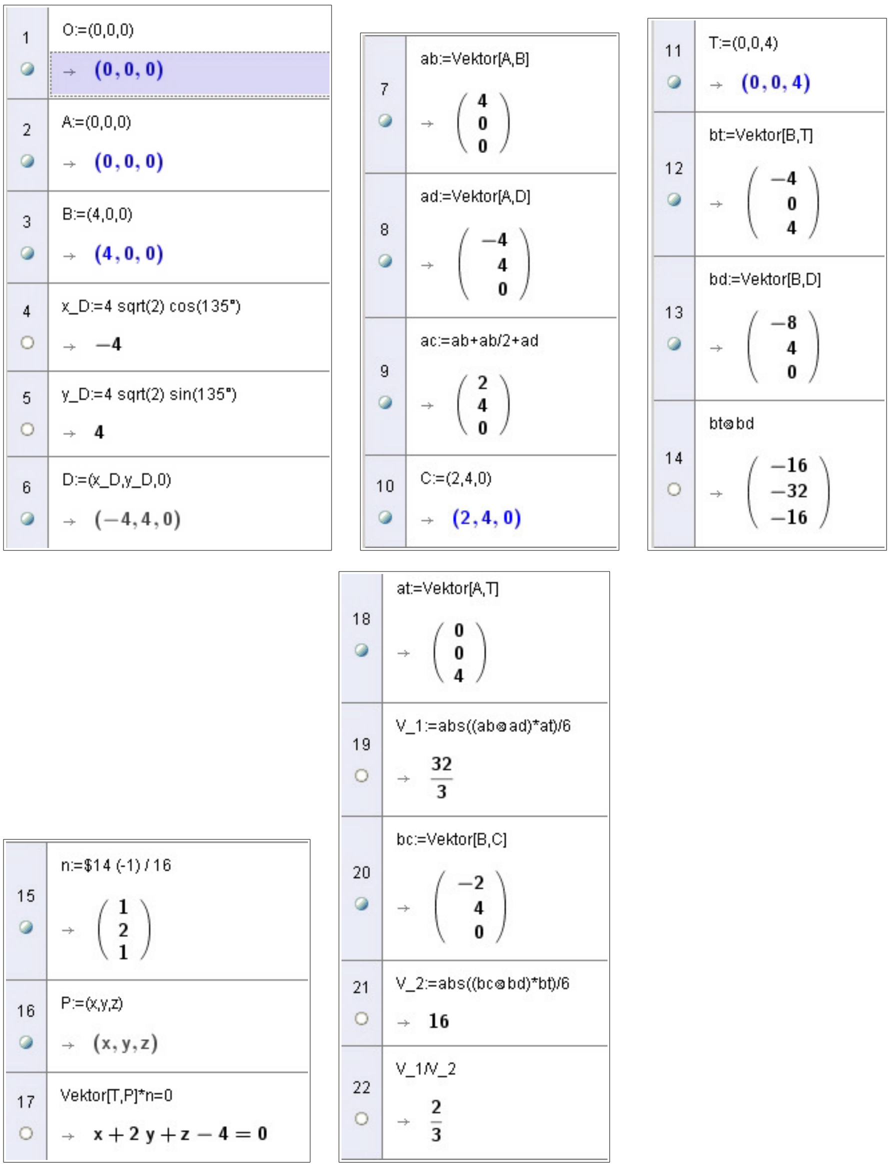
$$\overrightarrow{TB} \times \overrightarrow{TD} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & -4 \end{vmatrix} = [16, 32, 16] = 16\,[1, 2, 1]$$

Velger normalvektor: $\vec{n} = [1, 2, 1]$

Betingelse for plan α:
$\overrightarrow{TP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x, y, z-4] \cdot [1, 2, 1] = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z - 4 = 0 \qquad QED$

d) $$\frac{V_1}{V_2} = \left| \frac{\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AT}}{\frac{1}{6}(\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{CT}} \right| = \left| \frac{([4,0,0]\times[-4,4,0])\cdot[0,0,4]}{([2,-4,0]\times[-2,-4,4]} \right| = \left| \frac{[0,0,16]\cdot[0,0,4]}{[0,0,-24]\cdot[-2,-4,4]} \right| = \left| \frac{16\cdot 4}{24\cdot 4} \right| = \frac{2}{3}$$

Kunne muligens spare litt tid ved å gjøre oppgaven i CAS:



Oppgave 4

Innfører: $a = BC = 8, \quad b = BD = BC + CD = 8 + 7.3 = 15.3$

a)

$$f(x) = \tan\alpha = \tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1+\tan u \tan v} = \frac{\frac{b}{x}-\frac{a}{x}}{1+\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{x}} = \frac{x(b-a)}{x^2+ab} = \frac{7.3x}{x^2+122.4} \qquad QED$$

b) Brøkregel: $f'(x) = \frac{(b-a)(x^2+ab)-x(b-a)2x}{(x^2+ab)^2} = \frac{(a-b)x^2-(a-b)ab}{(x^2+ab)^2}$

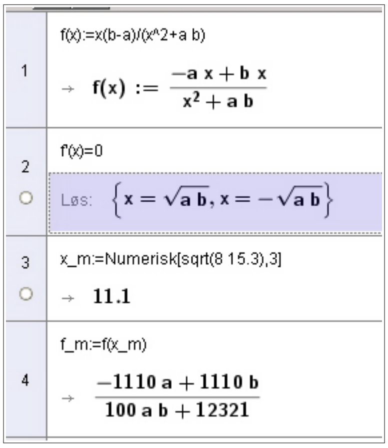
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (a-b)x^2-(a-b)ab = 0 \Leftrightarrow x^2 = ab \Leftrightarrow$$
$x = \pm\sqrt{ab}$ (Negativ løsning forkastes...)

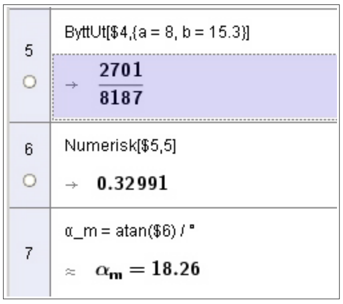
): $x = \sqrt{8 \cdot 15.3} \approx 11.1$ [m]

$$f_{\max} = f(11.1) = \frac{7.3 \cdot 11.1}{11.1^2+122.4} \approx 0.32991$$

c) $\tan\alpha_{\max} = f_{\max} = 0.32991 \Rightarrow \alpha_{\max} = \tan^{-1}(0.32991) \approx 18.3^\circ$
(At $x^2 = ab$, altså at $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ eller at x er mellomproporsjonalen mellom a og b, kan vises ved et rent geometrisk resonnement (se oppgaver med punktets potens i R1!). En slik geometrisk løsning er betraktelig enklere å håndtere når AB ikke lenger står normalt på BD og må sies å være adskillig mer elegant enn den trigonometriske løsningen denne oppgaven legger opp til og som også blir svært omstendelig hvis vi generaliserer oppgaven til en litt mer realistisk modell...)

Også her kunne vi spart litt tid ved å bruke CAS på deler av oppgaven:





Oppgave 5

a) Radien i kuleflaten er avstanden fra planet α til S, så avstandsformelen gir:

$$R = \frac{|2x_S + y_S - 2z_S + 3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{|2\cdot 11 + 2 - 2(-6) + 3|}{3} = \frac{39}{3} = 13$$

(Eventuelt lage punkt $A = (0,-3,0)$ i planet ved å velge $x = y = 0$:

$$R = \left| \frac{\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{n_\alpha}}{|\overrightarrow{n_\alpha}|} \right| = \left| \frac{[11,5,-6]\cdot[2,1,-2]}{3} \right| = \left| \frac{22+5+12}{3} \right| = \frac{39}{3} = 13 \text{)}$$

Ligningen for kuleflaten:

$$(x-11)^2 + (y-2)^2 + (z+6)^2 = 13^2$$

(Eller: $x^2 + y^2 + z^2 - 22x - 4y + 12z - 8 = 0$)

b) Planet α har normalvektor $\overrightarrow{n_\alpha} = [2,1,-2]$
Enhetsvektor i samme retning: $\vec{e} = \frac{1}{|\overrightarrow{n_\alpha}|}\overrightarrow{n_\alpha} = \frac{1}{3}[2,1,-2]$

Tangeringspunkt T:

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{OS} \pm R\,\vec{e} + [11,2,-6] \pm 13\tfrac{1}{3}[2,1,-2] = [11,2,-6] \pm \tfrac{13}{3}[2,1,-2]$$

$\overrightarrow{OT_1} = [\frac{59}{3}, \frac{19}{3}, -\frac{44}{3}]$ eller $\overrightarrow{OT_2} = [\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{8}{3}]$

Innsetting i ligningen for α viser at $T = T_2 = (\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{8}{3})$

c) Avstand fra β til S:

$$a = \frac{|2x_S + y_S - 2z_S|}{3} = \frac{|2\cdot 11 + 2 - 2(-6)|}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

Radius i sirkelen finnes med Pythagoras: (Tegn figur!)

$$r = \sqrt{R^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

En del av dette kan selvfølgelig også gjøres med CAS: