R2 - Vektorer

25.09.09
Løsningsskisser

I

Gitt vektorene $\vec{u} = [1,2,3]$ og $\vec{v} = [2,-3,5]$.
Regn ut:

a) $\vec{u} - \vec{v}$ b) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ c) $\vec{u} \times \vec{v}$ d) $5\vec{u} - 2\vec{v}$ e) $|\vec{v}|$ f) Vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$

Oppgave I: Krever lavt kompetansenivå: Grunnleggende regneregler og formler, innsettingsoppgaver

a) $\vec{u} - \vec{v} = [1,2,3] - [2,-3,5] = [-1,5,-2]$
b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = [1,2,3] \cdot [2,-3,5] = 11$

c) $\vec{u} \times \vec{v} = [1,2,3] \times [2,-3,5] = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = [19,1,-7]$

d) $5\vec{u} - 2\vec{v} = 5[1,2,3] - 2[2,-3,5] = [5,10,15] - [4,-6,10] = [1,16,5]$

e) $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{38} \approx 6.16$

f) $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{11}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{38}} = \frac{11}{\sqrt{14}\sqrt{38}} = \frac{11}{2\sqrt{7}\sqrt{19}} \Rightarrow \alpha \approx 61.5^\circ$
Et lite poeng her, hvis en vinkel skal være nøyaktig i n siffer,
må vi bruke n+1 siffer i cosinus-verdien!

II

Gitt vektorene $\vec{u} = [2,-1,3]$ og $\vec{v} = [5,1,2]$
a) Finn projeksjonen av $\vec{u}$ på $\vec{v}$.
b) Hva er arealet av parallellogrammet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$?
c) Hva er volumet av parallellepipedet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ og $\vec{w} = [1,3,5]$?
d) Regn ut vektoren $\vec{a} = |\vec{u}|\,\vec{v} + |\vec{v}|\,\vec{u}$.
e) Vis at vinklene $\angle \vec{u},\vec{a}$ og $\angle \vec{a},\vec{v}$ er like.

Oppgave II: a), b) og c): Krever lavt kompetansenivå: Innsetting i formler
d): Krever middels kompetansenivå: Må skjønne notasjon og terminologi
e): Krever høyt kompetansenivå: Litt tung regning, krever oversikt og forståelse.

a) $p = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{[2,-1,3]\cdot[5,1,2]}{\sqrt{5^2+1^2+2^2}} = \frac{15}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{2} \approx 2.74$
(Som vektor: $\vec{p} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}||\vec{v}|}\vec{v} = \frac{15}{30}\vec{v} = \frac{1}{2}[5,1,2]$)

b) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = [-5,11,7]$

Areal: $A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{5^2 + 11^2 + 7^2} = \sqrt{195} \approx 14.0$

(Eller: $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} = \sqrt{14 \cdot 30 - 15^2} = \sqrt{195}$)

c) $V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = |[-5, 11, 7] \cdot [1, 3, 5]| = 63$

d) $\vec{a} = |\vec{u}|\,\vec{v} + |\vec{v}|\,\vec{u} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}\,[5, 1, 2] + \sqrt{5^2 + 1^2 + 2^2}\,[2, -1, 3] =$
$[5\sqrt{14} + 2\sqrt{30}, \sqrt{14} - \sqrt{30}, 2\sqrt{14} + 3\sqrt{30}] =$
$\approx [29.7, -1.74, 23.9]$
Vær konsekvent i avrunding her, like mange gjeldende siffer på hver komponent!

e) $\cos\angle\vec{u},\vec{a} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{|\vec{u}||\vec{a}|} = \frac{[2,-1,3]\cdot[5\sqrt{14}+2\sqrt{30},\sqrt{14}-\sqrt{30},2\sqrt{14}+3\sqrt{30}]}{\sqrt{14}\,|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{14}\left(15\sqrt{14}+14\sqrt{30}\right)}{14|a|} =$
$\frac{1}{|\vec{a}|}(15 + \sqrt{14}\sqrt{30})$ $\quad (\approx \frac{35.49}{|a|})$

$\cos\angle\vec{a},\vec{v} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{a}||\vec{v}|} = \frac{[5\sqrt{14}+2\sqrt{30},\sqrt{14}-\sqrt{30},2\sqrt{14}+3\sqrt{30}]\cdot[5,1,2]}{|\vec{a}|\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}\left(30\sqrt{14}+15\sqrt{30}\right)}{30|a|} =$
$\frac{1}{|\vec{a}|}(\sqrt{30}\sqrt{14} + 15)$ $\quad (\approx \frac{35.49}{|a|})$

): Viklene er like.

(Bør regne eksakt for å vise at vinklene ikke bare er tilnærmet like...)

III

a) Hva er ligningen for yz –planet?
b) Finn en parameterfremstilling for y –aksen.
c) Hva er skjæringspunktet mellom z –aksen og planet $2x + y - z + 1 = 0$?
d) Hva er skjæringspunktet mellom xy –planet og linjen $l : [x, y, z] = [-1, 2, -3] + t[1, 2, 1]$?

Oppgave III: Krever middels kompetansenivå: En viss forståelse og resonnementer.

a) Ligning for yz –planet: $x = 0$
(Normalvektor: $\vec{n} = \vec{e_x} = [1, 0, 0]$
Punkt: $A = (0, 0, 0)$
$\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x - 0, y - 0, z - 0] \cdot [1, 0, 0] = 0 \Leftrightarrow x = 0$)

b) y –aksen har retningsvektor $\vec{e_y} = [0, 1, 0]$. Som punkt på y –aksen kan vi bruke origo: $P = (0, 0, 0)$.

Vektorform: $[x, y, z] = [0, 0, 0] + t[0, 1, 0]$

Parameterform: $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{array}\right\}$

c) Alle punkter på z –aksen har $x = 0$ og $y = 0$.
Innsatt i ligningen for planet: $2 \cdot 0 + 0 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$
): Skjæringspunkt: $(0, 0, 1)$

d) xy –planet har z –koordinat $z = 0$.
Innsatt i parameterfremstillingen for linjen gir dette vektorligningen:

$[x,y,0] = [-1,2,-3] + t[1,2,1] \Leftrightarrow$
$x = -1 + t \wedge y = 2 + 2t \wedge 0 = -3 + t \Leftrightarrow$
$x = -1 + 3 \wedge y = 2 + 2 \cdot 3 \wedge t = 3 \Leftrightarrow$
$x = 2 \wedge y = 8 \wedge t = 3$

): Skjæringspunkt: $(2,8,0)$

IV

Gitt punktene $A(2,3,5)$, $B(5,2,2)$ og $C(3,8,6)$.
a) Finn en parameterfremstilling for en linje l gjennom A og B.
b) Finn en parameterfremstilling for planet α gjennom A,B og C.
c) Finn ligningen for planet α gjennom A,B og C.
d) Finn vinkelen mellom planet α og yz-planet.

Oppgave IV: Krever middels kompetansenivå:
En viss forståelse og resonnementer, flertrinnsoppgaver.

a) Først: $\overrightarrow{AB} = [3,-1,-3]$, $AC = [1,5,1]$

$[x,y,z] = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = [2,3,5] + t[3,-1,-3]$

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 2 + 3t \\ y = 3 - t \\ z = 5 - 3t \end{array} \right\}$$

b)

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow [x,y,z] = [2,3,5] + s[3,-1,-3] + t[1,5,1] \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2 + 3s + t \\ y = 3 - s + 5t \\ z = 5 - 3s + t \end{array} \right\}$$

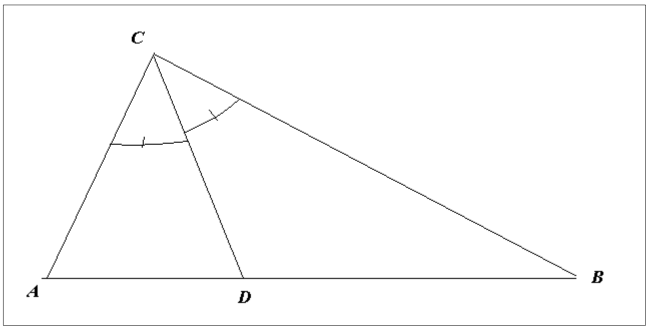
c) Normalvektor for plan:
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [14,-6,16] = 2[7,-3,8]$
Velger $\vec{n} = [7,-3,8]$
Bruker A som punkt og får:
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Leftrightarrow [7,-3,8] \cdot [x-2, y-3, z-5] = 0 \Leftrightarrow 7x - 14 - 3y + 9 + 8z - 40 = 0 \Leftrightarrow$

$7x - 3y + 8z - 45 = 0$

d) Vinkelen mellom planene er vinkelen mellom normalvektorene:
$\cos\alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{e_x}}{|\vec{n}||\vec{e_z}|} = \frac{[7,-3,8] \cdot [1,0,0]}{\sqrt{7^2+3^2+8^2}} = \frac{7}{\sqrt{122}} \approx 0.6338$
$\alpha = \cos^{-1}(0.6338) \approx 50.7^\circ$

V

I oppgave II d) så vi at vi kan lage en vektor $\vec{a} = |\vec{u}|\,\vec{v} + |\vec{v}|\,\vec{u}$ som halverer vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
Dette resultatet gjelder generelt og er ikke avhengig av de spesielle vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ vi brukte i II d)!
a) Bevis at $\vec{a} = |\vec{u}|\,\vec{v} + |\vec{v}|\,\vec{u}$ halverer vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.



Figuren viser en trekant ABC der linjen CD halverer vinkel $\measuredangle ACB$.
Vi skal bevise at $\frac{CA}{CB} = \frac{AD}{DB}$ når CD er halveringslinjen for $\measuredangle ACB$.
Vi setter $\vec{u} = \overrightarrow{CA}$ og $\vec{v} = \overrightarrow{CB}$.
Vi kaller forholdet mellom sidene AD og DB for $k = \frac{AD}{DB}$.
Da blir $\overrightarrow{AD} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} = \frac{k}{k+1}(\vec{v} - \vec{u})$ og vi har: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \vec{u} + \frac{k}{k+1}(\vec{v} - \vec{u})$.
$\overrightarrow{CD}$ kan også uttrykkes som $\overrightarrow{CD} = l \cdot \vec{a} = l(|\vec{u}|\,\vec{v} + |\vec{v}|\,\vec{u})$.
b) Lag en vektorligning og vis at $k = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}$.

Oppgave V: Krever høyt kompetansenivå:
a) Krever gode algebraferdigheter, forståelse og oversikt.
b) Krever god kjennskap til terminologi, evne til å lese og forstå matematisk fremstilling, og kombinere egne kunnskaper og informasjon gitt i oppgaven.

a) Som i II d), men med bokstaver:

$$\cos\measuredangle \vec{u},\vec{a} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{|\vec{u}||\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{u}||\vec{a}|}\vec{u}\cdot(|\vec{u}|\vec{v} + |\vec{v}|\vec{u}) = \frac{1}{|\vec{u}||\vec{a}|}(|\vec{u}|\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|\vec{u}\cdot\vec{u}) =$$
$$\frac{1}{|\vec{u}||\vec{a}|}(|\vec{u}|\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}||\vec{u}|\cdot|\vec{u}|) = \frac{1}{|\vec{a}|}(\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{u}||\vec{v}|)$$

$$\cos\measuredangle \vec{a},\vec{v} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{a}||\vec{v}|} = \frac{1}{|\vec{a}||\vec{v}|}(|\vec{u}|\vec{v} + |\vec{v}|\vec{u})\cdot\vec{v} = \frac{1}{|\vec{a}||\vec{v}|}(|\vec{u}|\vec{v}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|\vec{u}\cdot\vec{v}) =$$
$$\frac{1}{|\vec{a}||\vec{v}|}(|\vec{u}||\vec{v}|^2 + |\vec{v}|\vec{u}\cdot\vec{v}) = \frac{1}{|\vec{a}|}(|\vec{u}||\vec{v}| + \vec{u}\cdot\vec{v})$$

): Viklene er like.

Alternativt: $\vec{a}$ er summen av to vektorer $|\vec{u}|\vec{v}$ og $|\vec{v}|\vec{u}$ som er ***like lange***:
$$\big||\vec{u}|\vec{v}\big| = |\vec{u}||\vec{v}| \qquad \text{og} \qquad \big||\vec{v}|\vec{u}\big| = |\vec{u}||\vec{v}|$$

Vektorsummen $\vec{a}$ er da diagonalen i en rombe, og der står diagonalene normalt på hverandre
og halverer hjørnevinklene! (Hvis man ikke vet dette kan det vises med innvendige og utvendige vinkler.)

b) Vektorligning kan lages ved å kombinere de to oppgitte uttrykkene for $\overrightarrow{CD}$:

$$l(|\vec{u}|\,\vec{v} + |\vec{v}|\,\vec{u}) = \vec{u} + \frac{k}{k+1}(\vec{v} - \vec{u}) \Leftrightarrow$$
$$l|\vec{u}|\,\vec{v} + l|\vec{v}|\,\vec{u} = (1 - \frac{k}{k+1})\vec{u} + \frac{k}{k+1}\vec{v} \Leftrightarrow$$
$$l|\vec{v}|\,\vec{u} + l|\vec{u}|\vec{v} = \frac{1}{k+1}\vec{u} + \frac{k}{k+1}\vec{v} \Leftrightarrow$$
$$l|\vec{v}| = \frac{1}{k+1} \wedge l|\vec{u}| = \frac{k}{k+1} \Leftrightarrow$$
$$l = \frac{1}{(k+1)|\vec{v}|} = \frac{k}{(k+1)|\vec{u}|} \Leftrightarrow$$
$$k = \frac{(k+1)|\vec{u}|}{(k+1)|\vec{v}|} = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} = \frac{CA}{CB} \qquad QED$$

Formler:

$[x_1, y_1, z_1] \pm [x_2, y_2, z_2] = [x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2] \qquad k[x, y, z] = [kx, ky, kz]$
$|[x, y, z]| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$[x_1, y_1, z_1] \cdot [x_2, y_2, z_2] = x_1x_2 + y_1y_2 +, z_1z_2$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$, der α er vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$
Projeksjonen av $\vec{u}$ på $\vec{v}$er: $p = |\vec{u}|\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$ (Som vektor: $\vec{p} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}||\vec{v}|}\vec{v}$)
$\vec{u} \times \vec{v} = [y_1z_2 - y_2z_1, -x_1z_2 + x_2z_1, x_1y_2 - x_2y_1]$
$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha = \sqrt{(|\vec{u}||\vec{v}|)^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$
Plan gjennom $P = (x_p, y_p, z_p)$ med normalvektor $\vec{n} = [a, b, c]$ har ligningen
$a(x - x_p) + b(y - y_p) + c(z - z_p) = 0$
Plan gjennom $P = (x_p, y_p, z_p)$, parallelt med $\vec{u} = [x_u, y_u, z_u]$ og $\vec{v} = [x_v, y_v, z_v]$ har parameterfremstillingen

$$\left\{\begin{array}{c} x = x_p + sx_u + tx_v \\ y = y_p + sy_u + ty_v \\ z = z_p + sz_u + tz_v \end{array}\right\}$$

Hvis planet er gitt av tre punkter A, B og C, lager vi parameterfremstillingen på samme måte, med $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ og $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Arealet av et parallellogram utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har arealet $|\vec{u} \times \vec{v}|$
Volumet av et parallellepiped utspent av $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ har volumet $|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$