R2 - K4: Funksjoner

19.02.10
Løsningsskisser

I

Deriver de trigonometriske funksjonene:

a) $f(x) = \sin x + x$ b) $f(x) = \sin^2 x$

c) $f(x) = \sin x \tan x$ d) $f(x) = \frac{\sin x}{2-\cos x}$

a) $f'(x) = \cos x + 1$

b) Kjerneregel: $f(x) = u^2, \quad u = \sin x$

$$f'(x) = 2u \cdot \cos x = 2\sin x \cos x = \sin(2x)$$

c) Produktregel: $f'(x) = \cos x \tan x + \sin x \frac{1}{\cos^2 x} = \sin x + \sin x \frac{1}{\cos^2 x} =$

$$\sin x\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right) = \sin x \frac{\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$$

(Eventuelt: $\sin x \frac{2-\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$)

d) Brøkregel:

$$f'(x) = \frac{\cos x(2-\cos x) - \sin x(-(-\sin x))}{(2-\cos x)^2} = \frac{2\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(2-\cos x)^2} = \frac{2\cos x - (\cos^2 x + \sin^2 x)}{(2-\cos x)^2} = \frac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2}$$

II

Gitt funksjonen $f(x) = \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}, \qquad D_f = [0, 2\pi\rangle$

a) Finn eventuelle nullpunkter.
b) Finn eventuelle ekstremalpunkter.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$

):   Nullpunkter: $(0,0), (\pi, 0)$

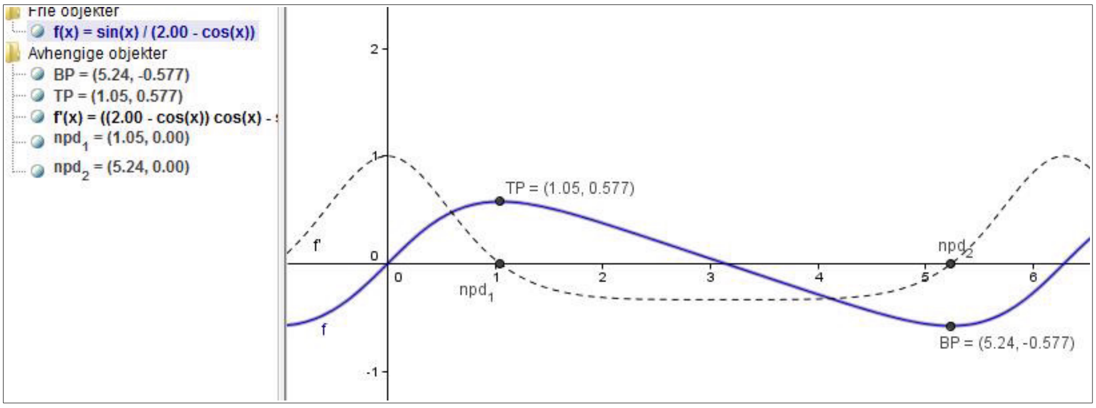
b) Se I d): $f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + l2\pi$$

):   Toppunkt: $\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx (1.05, 0.577)$

Bunnpunkt: $\left(\frac{5\pi}{3}, f\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx (5.24, -0.577)$

Bunnpunkt: $(0, f(0)) = (0, 0)$ (***Ikke glem endepunktet!***)



Kommandoer i Ggb:

f(x)=sin(x)/(2-cos(x))
f'(x)
npd_1=Nullpunkt[f',1,2]
npd_2=Nullpunkt[f',5,6]
TP=(x(npd_1),f(x(npd_1)))
BP=(x(npd_2),f(x(npd_2)))

III

a) Gitt funksjonen $f(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$, $\quad D_f = [0, 2\pi\rangle$
Skriv funksjonen på formen $A\sin(kx+\varphi)+L$.
b) Finn ekstremalpunkter.
c) Finn vendepunkter.

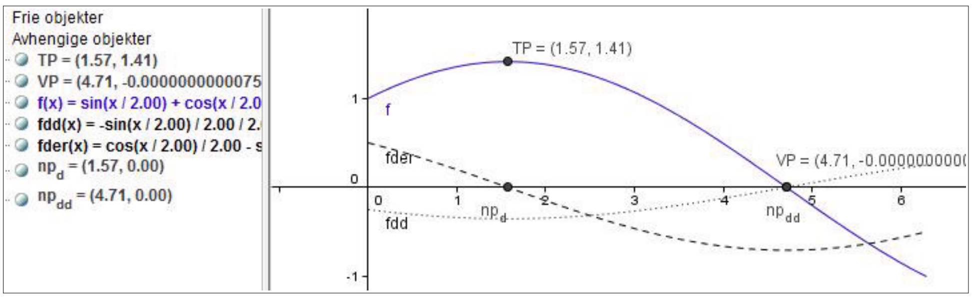
a) $f(x) = \sqrt{1^2+1^2}\,\sin(\frac{x}{2}+\varphi)$, $\quad \tan\varphi = \frac{1}{1}, \varphi \in 1KV$

$$f(x) = \sqrt{2}\,\sin(\tfrac{x}{2}+\tfrac{\pi}{4})$$

b) Ekstremalpunkt når $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow$
$x = 2(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+k4\pi = \frac{\pi}{2}+k4\pi$
): Toppunkt: $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2})) = (\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}) \approx (1.57, 1.41)$

Bunnpunkt: $(0, f(0)) = (0, 1)$ (***Ikke glem endepunktet!***)

c) Vendepunkt når $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} = 0+k\pi \Leftrightarrow$
$x = -\frac{\pi}{2}+k2\pi$
): Vendepunkt: $(\frac{3\pi}{2}, f(\frac{3\pi}{2})) = (\frac{3\pi}{2}, 0)$



Kommandoer i Ggb:

f(x)=Funksjon[sin(x/2)+cos(x/2),0,2π] (Funksjon[...] for å avgrense til definisjonsmengde.)

fder(x)=Funksjon[f'(x),0,2π]
fdd(x)=Funksjon[f''(x),0,2π]
np_d=Nullpunkt[f',1,2]
TP=(x(np_d),f(x(np_d)))
np_{dd}=Nulllpunkt[f'',4,5]
VP=(x(np_{dd}),f(x(np_{dd})))

IV

En butikk er oppe fra 08.00 til 20.00 og har følgende statistikk over lengre tid:

Tid: t [timer]	0	2	4	6	7	8	9	10	12
Kunder: $k(t)$ [antall]	4	13.9	22.4	28	29.5	30	29.5	28	22.4

a) Finn ved regning en funksjon på formen $A\sin(kt+\varphi)+L$ som passer med verdiene i tabellen.
b) Bruk lommeregner til å finne en slik funksjon.
c) Når er det 24 kunder i butikken?

a) ***Viktig å plotte punktene i tabellen og se på plottet!***
Når vi plotter funksjonen ser vi at vi ikke har en hel periode, så det er litt vanskelig å si hva L er,
så vi velger på øyemål ut fra grafen: $L = 4$.
Det har også som konsekvens at faseforskyvningen $\phi = \frac{\varphi}{k} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$
Da blir amplituden: $A = \max - L = 30 - 4 = 26$

Vi bruker toppunktet til å bestemme resten (k):
$\sin(k8) = 1 \Leftrightarrow k8 = \frac{\pi}{2} + l2\pi \Leftrightarrow k = \frac{\pi}{16} + l\frac{\pi}{4}$
Velger $k = \frac{\pi}{16} = 0.196$

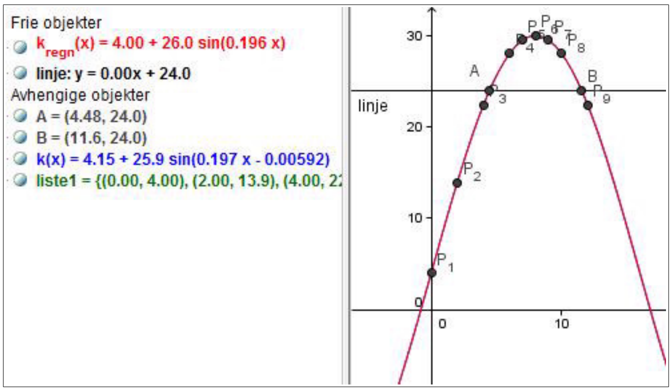
$k(t) = 4 + 26\sin(0.196t)$

b) Legger inn tabellen med t i L1 og $k(t)$ i L2 med STAT, EDIT.
Kjører sinus-kurvetilpasning med STAT, CALC, SinReg L1,L2,Y1

$k(t) = 4.15 + 25.9\sin(0.197 - 0.00592)$

c) $k(t) = 24 \Leftrightarrow 4 + 26\sin(0.196t) = 24 \Leftrightarrow \sin(0.196t) = \frac{20}{26} \approx 0.76923 \Leftrightarrow$
$0.196t = 0.878 + k2\pi \vee 0.196t = \pi - 0.878 + l2\pi \Leftrightarrow$
$t = \frac{0.878}{0.196} + k\frac{2\pi}{0.196} \vee t = \frac{\pi - 0.878}{0.196} + l\frac{2\pi}{0.196} \Leftrightarrow$
$t = 4.48 + k32.1 \vee t = 11.5 + l32.1$

): 24 kunder ca. 12.30 og ca. 19.30



Kommandoer i Ggb:
Legger punkter i regneark, merker, høyreklikker og velger "Lag liste med punkter".
k=RegSin[liste1]
k_{regn}=4+26*sin(0.196*x)
linje: y=24
A og B ved å finne skjæringspunkt geometrisk eller
A=Skjæring[linje,k_{regn}]

V

En idrettsutøver teller pulsen etter en krevende øvelse og får dette resultatet:

Tid: t [min]	0	1	2
Pulsslag: $f(t)$ [antall]	198	120	85

Treneren til idrettsutøveren har stor tro på digitale hjelpemidler og har fått et program til å lage tre kurvetilpasninger han har tenkt å bruke som modell for pulsutviklingen de første 10 minuttene etter en øvelse:
1) $f(t) = 21.5t^2 - 99.5t + 198$ 2) $g(t) = 193e^{-0.423t}$ 3) $h(t) = 152e^{-0.662t} + 44$
Treneren er spesielt fornøyd med andregradsfunksjonen da den gir helt riktige verdier for de tre målte tidspunktene.
Hvilke refleksjoner gjør du deg?
Hvilken funksjon ville du brukt og hvorfor?
(Det er ikke meningen du skal regne eller gjøre kurvetilpasninger her, bare bruke hodet og gi en fornuftig vurdering.)

1) (Andregradsfunksjonen) passer med de tre målepunktene, men vil stige igjen innenfor definisjonsområdet [0,10],
hvilket er helt unaturlig.
2) er en eksponentialfunksjon som avtar mot 0, hvilket heller ikke er så naturlig, med mindre utøveren har tatt seg så hardt ut at han dør...
3) flater pent ut langs en horisontal asymptote på 44, som vi derfor tolker som hvilepuls.

3) er den eneste som oppfører seg rimelig i forhold til den virkeligheten den skal modellere.

VI

En lineær kurvetilpasning til punktene (1,1.5), (2,3) og (3,5.5) gir linjen
$y = 2x - 0.667$.
Regner man ut korrelasjonskoeffisienten får man $r = 0.990$.
Hvorfor ville du heller brukt andregradsfunksjonen $0.5x^2 + 1$ som kurvetilpasning her?

Et raskt plott viser at de tre punktene ikke ligger helt på en rett linje.
En kurvetilpasning av en andregradsfunksjon gjennom tre punkter vil derimot gå eksakt gjennom de tre punktene.

Naturlig å velge en andregradsfunksjon, da

-Minst kvadratavvik. (Null i dette tilfellet.)
-Ser av plottet at punktene ligger på en krum kurve.

Korrellasjonskoeffisienten har derfor liten interesse i rene kurvetilpasninger, det er bedre å ***se*** på plottet
og bruke ***summen av kvdratavvik*** som kriterium for god kurvetilpasning.
Eksempel på utregning av summen av kvadratavvik på lommeregner:
Hvis vi har lagt $x-$ og $y-$verdier i L1 og L2 på lommeregneren og lagt en kurvetilpasning i Y1 med
for eksempel LinReg L1, L2, Y1, kan vi regne ut summen av kvadratavvik med:

sum((**Y1**(**L1**)-**L2**) ^**2**)

Eksempel på utregning av summen av kvadratavvik i GeoGebra:
I GeoGebra kan vi med $x-$ og $y-$verdier i listen liste1 og kurvetilpasningen f(x)=RegPoly[liste1,1] i $f(x)$,
kan vi regne ut summen av kvadratavvik med.

sse=**Sum**[(**f**(**x**(**liste1**))-**y**(**liste1**))^**2**]