R2 - Eksamen 20.05.2015

Løsningsskisser

Del I - Uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) $f'(x) = -3(-\sin x) = 3\sin x$

b) Kjerneregel: $g(x) = u^2, \qquad u = \sin x$
$g'(x) = 2u\cos x = 2\sin x\cos x = \sin(2x)$

c) Produktregel: $h'(x) = 3x^2e^{-x} + x^3e^{-x}(-1) = x^2(3-x)e^{-x}$

Oppgave 2

a) $\int_1^2 (x^2 + 2x - 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} + 2^2 - 3 \cdot 2 - (\frac{1}{3} + 1 - 3) = \frac{7}{3}$

b) Delbrøksoppspalting: $\frac{3x}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$
$HS = \frac{Ax+A+Bx-2B}{fn} = \frac{(A+B)x+(A-2B)}{fn}$
$A + B = 3 \wedge A - 2B = 0 \Leftrightarrow A = 2 \wedge B = 1$

$\int \frac{3x}{(x-2)(x+1)}dx = \int(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1})dx = 2\ln|x-2| + \ln|x+1| + C_1 =$
$\ln(C(x-2)^2|x+1|)$

c) Delvis integrasjon:
$\int x\ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx =$
$\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$

Oppgave 3

a) Det kan diskuteres om det er en integrasjonsmetode å derivere integralfunksjonen og vise at den blir lik funksjonen jeg skal integrere, så jeg unngår denne problematikken ved å bruke variabelskiftet:
$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$
$\int xe^{x^2}dx = \int xe^u\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C \qquad QED$

b) $y' + 2xy = 4x, \qquad IF = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$

$(ye^{x^2})' = 4xe^{x^2} \Leftrightarrow (ye^{x^2}) = 4\frac{1}{2}e^{x^2} + C \Leftrightarrow$ (Ifølge a).)
$ye^{x^2} = 2e^{x^2} + C \Leftrightarrow y = 2 + Ce^{-x^2}$ (Generell løsning.)

Hadde ikke trengt a), da ligningen også er separabel: $y' = 2x(2-y)$
$y \neq 2$:

$$\int \frac{dy}{2-y} = \int 2x \Leftrightarrow -\ln|2-y| = x^2 + C_1 \Leftrightarrow$$
$$e^{-\ln|2-y|} = e^{x^2+C_1} \Leftrightarrow \frac{1}{|2-y|} = C_2e^{x^2} \Leftrightarrow |2-y| = \frac{1}{C_2e^{x^2}} \Leftrightarrow 2-y = C_3e^{-x^2} \Leftrightarrow$$
$$y = 2 + Ce^{-x^2} \quad (y = 2 \text{ dekket av } C = 0)$$

$y(0) = 8$:
$$8 = 2 + Ce^0 \Rightarrow C = 6$$

): $y = 2 + 6e^{-x^2}$ (Spesiell løsning.)

Oppgave 4

a) Kvotient: $k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{1}{x}$

Konvergensområde:
Enten løse de to ulikhetene: $-1 < \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{1}{x} \wedge \frac{1}{x} < 1$
Eller:
$$|k| < 1 \Leftrightarrow k^2 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)(1+x)}{x^2} < 0$$

```
               -1         0          1
1 - x :———————————————><—————————o- - - - - - - - - -
1 + x :- - - - - - - o————————><————————————————————
x^2   :  ——————————————><———————————————————
VS    :  - - - - - - - o————————><—————————o- - - - -  - - - -
```

Konvergensområde: $x \in \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$

(Eller: $x < -1 \vee x > 1$ Eller: $|x| > 1$)

b) $S(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{2}{1-\frac{1}{x}} = \frac{2x}{x-1}$

$$S(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} = 4 \Leftrightarrow \frac{2x-4(x-1)}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{4-2x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 4 - 2x = 0 \Leftrightarrow$$
$x = 2$ (Som er i konvergensområdet.)

Oppgave 5

a) $\overrightarrow{AB} = [-3, 4, 0]$, $\overrightarrow{AC} = [-3, 0, 1]$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [4, 3, 12]$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = \frac{\sqrt{169}}{2} = \frac{13}{2}$$

b) Normalvektor: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [4, 3, 12]$

$\overrightarrow{CQ} \cdot \vec{n} = 0$ (Der $Q = (x, y, z)$, et punkt i planet.)

$[x, y, z - 1] \cdot [4, 3, 12] = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + 12z - 12 = 0$

c) P i planet når:
$4t + 3\frac{t^2}{3} + 12\frac{-t}{4} - 12 = 0 \Leftrightarrow 4t + t^2 - 3t - 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow$
$t = -4 \vee t = 3$ (Negativ tid forkastes, da partikkel starter i Origo når $t = 0$.)

): Partikkelen treffer planet etter 3 tidsenheter. (Hva nå tidsenheten måtte være...)

Treffpunktet S gitt av: $S = (3, \frac{3^2}{3}, -\frac{3}{4}) = (3, 3, -\frac{3}{4})$

Oppgave 6

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n + n - 1 \end{array} \right\}$$

$n = 1$:
Definisjon: $a_1 = -1$
Formel: $a_1 = \frac{1(1-3)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ *OK*!

Induksjonstrinnet: $n \to n + 1$:

Må vise at: $a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1-3)}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$, forutsatt at $a_n = \frac{n(n-3)}{2}$

Vi regner ut a_{n+1} ved hjelp av definisjonen:
$$a_{n+1} = a_n + n - 1 = \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 = \frac{n(n-3)+2(n-1)}{2} = \frac{n^2-3n+2n-2}{2} = \frac{n^2-n-2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} \quad QED$$

Oppgave 7

a) Nullpunkter:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow$
$3 - 3\cos(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \cos(1 - x^2) = 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 + k2\pi \Leftrightarrow x^2 = 1 - k2\pi \Leftrightarrow$
$x = \pm\sqrt{1 - k2\pi}$

): $(-1, 0), (1, 0)$

b) Kjerneregel: $f(x) = 3 - 3\cos u$, $u = 1 - x^2$

$f'(x) = -3(-\sin u)(-2x) = -6x\sin(1 - x^2)$

Ekstremalpunkter når $f'(x) = 0$:
$-6x\sin(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \sin(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow$
$x = 0 \vee 1 - x^2 = 0 + k\pi \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 1 - k\pi \Leftrightarrow$

$x = 0 \vee x = \pm\sqrt{1 - k\pi}$

$L = \{-1, 0, 1\}$

```
                          -1          0          1
-6x :              ------------------o- - - - - - - - - - - - - -
sin(1 - x²) : - - - - - - - o------------------o- - - - - - - -
     f'(x) :   - - - - - - - o---------o- - - - - o-------------

     f(x) :         \        BP  /  TP  \  BP    /
```

): Bunnpunkter: $(-1, 0), (1, 0)$
Topp-punkt: $(0, 3 - 3\cos 1)$

c) Grafen til $f(x)$ er grafen angitt i alternativ (1).
(Den eneste som passer med utregningene og drøftingen i b).)

Oppgave 8

a) $x = u = v$ gir:
$\cos(u + v) = \cos(x + x) = \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

(Som kjent kan vi også omforme til:
$\cos(2x) = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$
og
$\cos(2x) = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1)$)

b) $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)1 =$
$\cos(2x)$

Oppgave 9

$\sin x + \cos x = \sqrt{1^2 + 1^2}\,\sin(x + \varphi), \qquad \tan\varphi = 1, \qquad \varphi$ i første kvadrant

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin(x + \frac{\pi}{4})$

Ligning:
$\sqrt{2}\,\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$
$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + l2\pi \Leftrightarrow$
$x = k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + l2\pi$

): $L = \{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\}$

Del II - Med hjelpemidler

Oppgave 1

Som alltid har oppgaveforfatterne glemt å antyde antall gjeldende siffer eller usikkerheten i modellen, så jeg velger 3 gjeldende siffer.

a) Etter 125 km: $v = 26 - 0.08 \cdot 125 = 16.0$ [km/t]

b) Løser ved å separere: $s' = 0.08(325 - s)$

$s \neq 325$:

$\int \frac{ds}{325-s} = \int 0.08dt \Leftrightarrow -\ln|325 - s| = 0.08t + C_1 \Leftrightarrow$

$\ln|325 - s| = -0.08t + C_2 \Leftrightarrow |325 - s| = e^{-0.08t+C_2} \Leftrightarrow$

$|325 - s| = C_3 e^{-0.08t} \Leftrightarrow 325 - s = Ce^{-0.08t} \Leftrightarrow$

$s = 325 - Ce^{-0.08t}$ (Generell løsning.)

($s = 325$ inkludert i løsningen når $C = 0$.)

Initialbetingelse: $s(0) = 0$ gir: $0 = 325 - Ce^0 \Leftrightarrow C = 325$

$s(t) = 325 - 325e^{-0.08t} = 325(1 - e^{-0.08t})$ (Spesiell løsning.)

c) Distanse etter en time: $s(1) = 325(1 - e^{-0.08}) \approx 25.0$ [km]

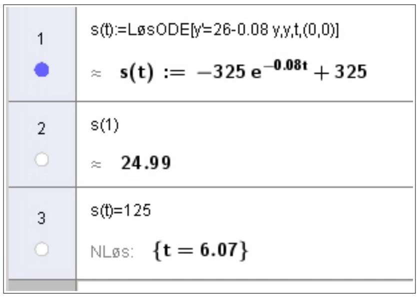
Tidsbruk på 125 km: $s(t) = 125 \Leftrightarrow$

$325(1 - e^{-0.08t}) = 125 \Leftrightarrow 1 - e^{-0.08t} = \frac{5}{13} \Leftrightarrow$

$1 - \frac{5}{13} = e^{-0.08t} \Leftrightarrow \ln\frac{8}{13} = -0.08t \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{8}{13}}{-0.08} \approx 6.07$

): ca. 6 timer og 4 minutter

Mulige CAS-beregninger i b) og c):



Oppgave 2

a) $\overrightarrow{AB} = [1, 0, -1]$, $\overrightarrow{AC} = [1, 1, 0]$, $\overrightarrow{AP} = [t, 2t + 1, t^2 + 2]$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [1, -1, 1]$$

$$V_{ABCP} = \frac{\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AP}\right|}{6} = \frac{\left|[1,-1,1]\cdot[t,2t+1,t^2+2]\right|}{6} = \frac{\left|t-2t-1+t^2+2\right|}{6} = \frac{\left|t^2-t+1\right|}{6} = \frac{t^2-t+1}{6}$$

b) $\frac{t^2-t+1}{6} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = -4 \vee t = 5$

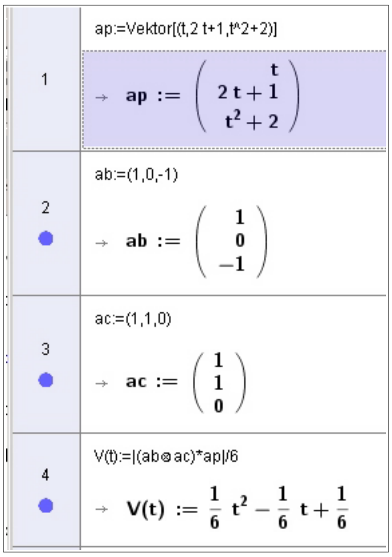
$P = (-4, -7, 18)$ eller $P = (5, 11, 27)$

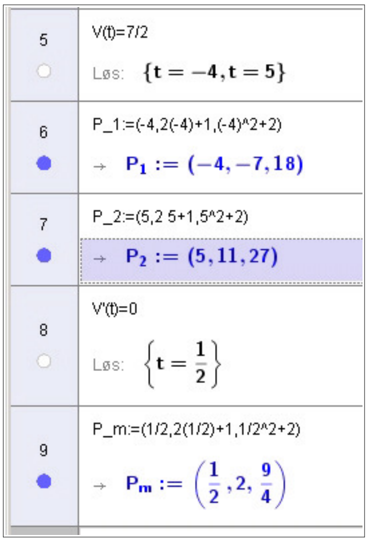
c) $V'(t) = \frac{t}{3} - \frac{1}{6}$

$V'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{t}{3} - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

$$P_{\min} = (\tfrac{1}{2}, 2\tfrac{1}{2} + 1, \tfrac{1}{2^2} + 2) = (\tfrac{1}{2}, 2, \tfrac{9}{4})$$

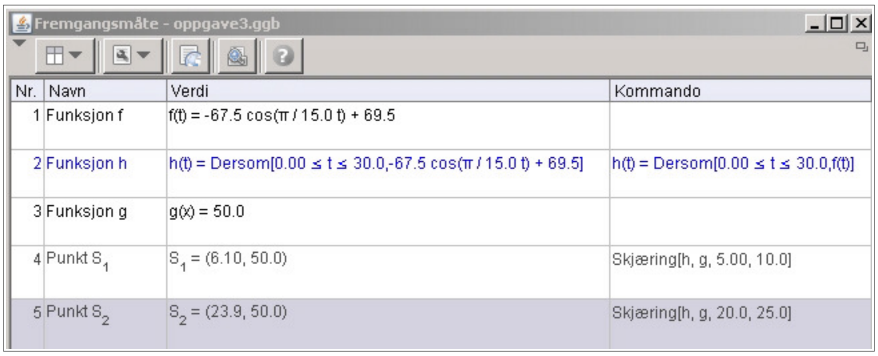
Hele oppgave med CAS:





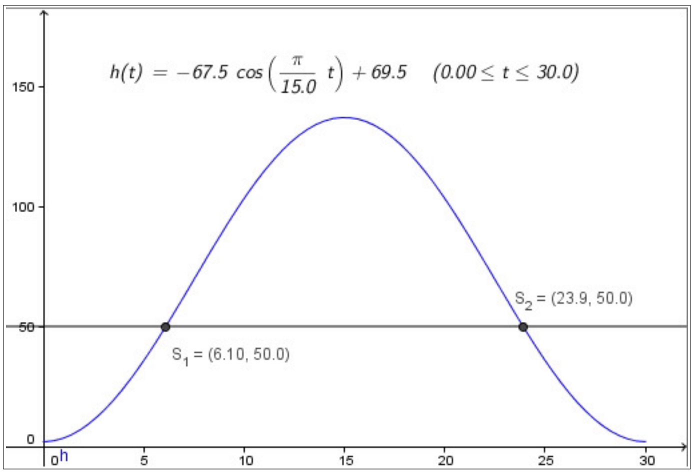
Oppgave 3

a) GeoGebra:



Fremgangsmåte - oppgave3.ggb

Nr.	Navn	Verdi	Kommando
1	Funksjon f	f(t) = -67.5 cos(π / 15.0 t) + 69.5	
2	Funksjon h	h(t) = Dersom[0.00 ≤ t ≤ 30.0,-67.5 cos(π / 15.0 t) + 69.5]	h(t) = Dersom[0.00 ≤ t ≤ 30.0,f(t)]
3	Funksjon g	g(x) = 50.0	
4	Punkt S_1	S_1 = (6.10, 50.0)	Skjæring[h, g, 5.00, 10.0]
5	Punkt S_2	S_2 = (23.9, 50.0)	Skjæring[h, g, 20.0, 25.0]



): 50 meter over bakkenivå etter ca. 6 og 24 minutter etter ombordstigning.

b) Vendepunkt når funksjonen krysser likevektslinjen på nivå 69.5 meter,
altså hver gang:

$$\cos(\tfrac{\pi}{15}t) = 0 \Leftrightarrow \tfrac{\pi}{15}t = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = 7.5 + k15$$

): Vendepunkter: $(7.5, 69.5)$ og $(22.5, 69.5)$

Endringshastighetene $h'(7.5) = 14.1$ [m/minutt] og
$h'(22.5) = -14.1$ [m/min] i endepunktene er de maksimale endrings-hastighetene i hver runde.

Oppgave 4

a) CAS:

1	f(x):=x^2+ a x+b $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := x^2 + a\,x + b}$
2	Q:=(s,f(s)) $\rightarrow$ $\mathbf{Q := (s, a\,s + b + s^2)}$
3	R:=(t,f(t)) $\rightarrow$ $\mathbf{R := (t, a\,t + b + t^2)}$
4	g(x):=Tangent[Q, f] $\rightarrow$ $\mathbf{g(x) := -s^2 + a\,x + 2\,s\,x + b}$
5	h(x):=Tangent[R, f] $\rightarrow$ $\mathbf{h(x) := -t^2 + a\,x + 2\,t\,x + b}$

Vi ser at $g(x) = (a + 2s)x + b - s^2$ og $h(x) = (a + 2t)x + b - t^2$,
selv om CAS viser uttrykkene utmultiplisert.

b) CAS:

6	L:=Skjæring[g, h] $\rightarrow\ L := \left\{\left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}as+\frac{1}{2}at+b+st\right)\right\}$
7	P:=Element[L, 1] $\rightarrow\ P := \left(\frac{s+t}{2}, \frac{as+at+2b+2st}{2}\right)$
8	x_P:=x(P) $\rightarrow\ x_P := \frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t$

Vi ser at P har x-koordinat $\frac{s+t}{2} = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t$.

c) CAS:

9	A_1:=IntegralMellom[f, g, s, x_P] $\rightarrow\ A_1 := -\frac{1}{24}s^3+\frac{1}{8}s^2t-\frac{1}{8}st^2+\frac{1}{24}t^3$
10	A_2:=IntegralMellom[f,h,x_P,t] $\rightarrow\ A_2 := -\frac{1}{24}s^3+\frac{1}{8}s^2t-\frac{1}{8}st^2+\frac{1}{24}t^3$

Vi ser at de to arealene A_1 og A_2 er like og uavhengige av parameterene a og b.