Prøve R2 - Vektorer

Kapittel 1.1 - 1.4:
12.09.08
Løsningsskisse

Relevante formler på siste side

I

Gitt punktene $A = (1,1,1)$, $B = (3,2,4)$ og $C = (4,3,6)$.
a) Skriv vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ og $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ på koordinatform.
b) Finn $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $3\vec{u}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ og $\vec{u}\times\vec{v}$.
c) Finn vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

a)
$\vec{u} = [2,1,3], \qquad \vec{v} = [3,2,5]$
b)
$\vec{u}+\vec{v} = [2+3, 1+2, 3+5] = [5,3,8]$
$\vec{u}-\vec{v} = [2-3, 1-2, 3-5] = [-1,-1,-2]$
$3\vec{u} = [3\cdot 2, 3\cdot 1, 3\cdot 3] = [6,3,9]$
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 3\cdot 5 = 23$
$\vec{u}\times\vec{v} = [-1,-1,1]$
c)
$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{23}{\sqrt{14}\sqrt{38}} = 0.9972 \Rightarrow \alpha \approx 4.29^\circ$

II

Gitt vektoren $\vec{u} = [3,4,5]$ og $\vec{v} = [1,3,6]$.
a) Hva er projeksjonen av $\vec{u}$ på $\vec{v}$?
b) Hva er arealet av trekanten som er utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$?
c) Finn en vektor som står normalt på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

a)
$p = |\vec{u}|\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{[3,4,5]\cdot[1,3,6]}{\sqrt{1^2+3^2+6^2}} = \frac{45}{\sqrt{46}} \approx 6.63$
b)
$A = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{u}||\vec{v}|)^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{50\cdot 46 - 45^2} = \frac{5}{2}\sqrt{11} \approx 8.3$
c)
$\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v} = [9,-13,5]$

III

Gitt punktene $A(2,3,5)$, $B(5,2,2)$ og $C(3,8,6)$.
a) Finn en parameterfremstilling for en linje l gjennom A og B.
b) Finn skjæringspunktet mellom linjen l og yz –planet.
c) Hvilken avstand har C fra linjen l?
d) Et plan β går gjennom punktene A, B og C. Finn en parameterfremstilling for dette planet.
e) Finn en normalvektor til planet β.
f) Finn en ligning for planet β.
g) Finn skjæringspunktet mellom planet β og z –aksen.
h) Hvilken vinkel danner planet β med xy –planet?

Først: $\overrightarrow{AB} = [3,-1,-3]$, $AC = [1,5,1]$

a) $[x, y, z] = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = [2, 3, 5] + t[3, -1, -3]$

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 2 + 3t \\ y = 3 - t \\ z = 5 - 3t \end{array} \right\}$$

b) yz –plan: $x = 0$, som gir:

$[0, y, z] = [2, 3, 5] + t[3, -1, -3] \Leftrightarrow 0 = 2 + 3t \wedge y = 3 - t \wedge z = 5 - 3t \Leftrightarrow$

$t = -\frac{2}{3} \wedge y = 3 - (-\frac{2}{3}) \wedge z = 5 - 3(-\frac{2}{3}) \Leftrightarrow$

Skjæringspunkt: $(0, \frac{11}{3}, 7)$

c) Avstand: $d = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{|[14, -6, 16]|}{\sqrt{3^2+1^2+3^2}} = \frac{2\sqrt{7^2+3^2+8^2}}{\sqrt{19}} = \frac{2\sqrt{122}}{\sqrt{19}} \approx 5.07$

d)

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow [x, y, z] = [2, 3, 5] + s[3, -1, -3] + t[1, 5, 1] \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2 + 3s + t \\ y = 3 - s + 5t \\ z = 5 - 3s + t \end{array} \right\}$$

e) Kan med fordel gjøres før c): $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [14, -6, 16] = 2[7, -3, 8]$

Velger $\vec{n} = [7, -3, 8]$

f)

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Leftrightarrow [7, -3, 8] \cdot [x - 2, y - 3, z - 5] = 0 \Leftrightarrow 7x - 14 - 3y + 9 + 8z - 40 = 0 \Leftrightarrow 7x - 3y +$

g) z –aksen: $x = 0, y = 0$:

Med ligning (enklest): $7 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 8z - 45 = 0 \Rightarrow z = \frac{45}{8}$, Skjæringspunkt:$(0, 0, \frac{45}{8})$

h) Vinkelen mellom planene er vinkelen mellom normalvektorene:

$\cos\alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{e_z}}{|\vec{n}||\vec{e_z}|} = \frac{[7, -3, 8] \cdot [0, 0, 1]}{\sqrt{7^2+3^2+8^2}} = \frac{8}{\sqrt{122}} \approx 0.7243\ldots$

$\alpha = \cos^{-1}(0.7243) \approx 43.6^\circ$

IV

Gitt punktene $A = (1, 0, 0)$, $B = (5, 4, 1)$ og $D = (-1, 3, 2)$.

a) $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$ spenner ut et parallellogram $ABCD$ der C er det fjerde hjørnet. Finn koordinatene til punktet C.

b) Gitt punktet $T = (0, 0, 7)$ som er topp-punktet for en pyramide med $ABCD$ som grunnflate. Finn volumet av pyramiden $ABCDT$.

c) Vi skal undersøke om to linjer er parallelle. Gjør rede for minst to måter å gjøre dette på.

a)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ og $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = [5, 4, 1] + [-2, 3, 2] = [3, 7, 3]$

$C = (3, 7, 3)$

b)

Volumformel: $\frac{1}{3}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AT}\right| = \frac{1}{3}|([4,4,1]\times[-2,3,2])\ \cdot[-1,0,7]| =$
$\frac{1}{3}|[5,-10,20]\cdot[-1,07]| = \frac{5}{3}|[1,-2,4]\cdot[-1,0,7]| = \frac{5}{3}27 = 45$

c)

1. Sjekke om retningsvektorene er parallelle: $\overrightarrow{r_1} = k\overrightarrow{r_2}$
2. Sjekke om $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_2}}{|\overrightarrow{r_1}||\overrightarrow{r_2}|}$ blir lik 1. (vinkel lik 0)
3. Sjekke om $\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{0}$ (eller $\left|\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_2}\right| = 0$)

Formler:

$[x_1,y_1,z_1]\pm[x_2,y_2,z_2] = [x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2]$

$k[x,y,z] = [kx,ky,kz]$

$|[x,y,z]| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$[x_1,y_1,z_1]\cdot[x_2,y_2,z_2] = x_1x_2+y_1y_2+,z_1z_2$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$, der α er vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

Projeksjonen av $\vec{u}$ på $\vec{v}$er $|\vec{u}|\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Avstanden fra et punkt P til et plan som har normalvektor $\vec{n}$ og inneholder et punkt A er $\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$

$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha$

$|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{(|\vec{u}||\vec{v}|)^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}$

$\vec{u}\times\vec{v} = [y_1z_2-y_2z_1,-x_1z_2+x_2z_1,x_1y_2-x_2y_1]$

Plan gjennom $P = (x_p,y_p,z_p)$ med normalvektor $\vec{n} = [a,b,c]$ har
ligningen $a(x-x_p)+b(y-y_p)+c(z-z_p) = 0$

Plan gjennom $P = (x_p,y_p,z_p)$, parallelt med $\vec{u} = [x_u,y_u,z_u]$ og $\vec{v} = [x_v,y_v,z_v]$ har
parameterfremstillingen

$$\left\{\begin{array}{c} x = x_p+sx_u+tx_v \\ y = y_p+sy_u+ty_v \\ z = z_p+sz_u+tz_v \end{array}\right\}$$

Hvis planet er gitt av tre punkter A, B og C, lager vi parameterfremstillingen på samme måte, med $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ og $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Arealet av et parallellogram utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har arealet $|\vec{u}\times\vec{v}|$

Avstanden fra et punkt P til en linje med retningsvektor $\vec{r}$ gjennom et punkt A er $\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{r}\right|}{|\vec{r}|}$

Volumet av et parallellepiped utspent av $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ har volumet $\left|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}\right|$