# Prøve R2 - Vektorer

**Kapittel 1 - Vektorer**
**24.10.08**

## I

Gitt vektorene $\vec{u} = [2,1,3]$ og $\vec{v} = [1,5,4]$.
a) Hva er projeksjonen av $\vec{u}$ på $\vec{v}$?
b) Hva er arealet av trekanten som er utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$?
c) Finn en vektor som står normalt på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
d) Finn ligningen for et plan gjennom punktet $P = (2,3,4)$ som er parallelt med $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
e) Finn dette planets skjæringspunkt med $y$ –aksen.

(Trykkfeil: d) og e) var feil nummerert.)

a) $p = \left|\vec{u}\right| \cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{[2,1,3]\cdot[1,5,4]}{\sqrt{1^2+5^2+4^2}} = \frac{19}{42}\sqrt{42} \approx 2.93$

b) $A = \frac{1}{2}\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \frac{1}{2}|[2,1,3]\times[1,5,4]| = \frac{1}{2}|[-11,-5,9]| = \frac{\sqrt{11^2+5^2+9^2}}{2} = \frac{\sqrt{227}}{2} \approx 7.53$

(Eventuelt:

$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2} = \frac{\sqrt{14\cdot 42-19^2}}{2} = \frac{\sqrt{227}}{2}$)

c) $\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v} = [-11,-5,9]$

d) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ} = 0$ der $Q = (x,y,z)$

$\Updownarrow$

$[-11,-5,9]\cdot[x-2,y-3,z-4] = 0$

$\Updownarrow$

$11x+5y-9z-1 = 0$

e) $y$ –akse:

$x = 0 \wedge z = 0$ : $5y-1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{5}$

): $(0,\frac{1}{5},0)$

## II

Gitt punktene $A = (1,0,0)$, $B = (5,4,1)$, $C = (-1,3,2)$ og $D = (2,1,9)$.

Finn volumet av pyramiden med grunnflaten $ABC$ og toppunkt $D$.

$\overrightarrow{AB} = [4,4,1]$, $\overrightarrow{AC} = [-2,3,2]$, $\overrightarrow{AD} = [1,1,9]$

$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}|([4,4,1]\times[-2,3,2])\cdot[1,1,9]| =$
$\frac{1}{6}|[5,-10,20]\cdot[1,1,9]| = \frac{175}{6} \approx 29.2$

## III

Gitt linjene $l\ :\ \left\{\begin{array}{c} x = 4t+1 \\ y = t-1 \\ z = -t+1 \end{array}\right\}$ og $m\ :\ \left\{\begin{array}{c} x = -2s+2 \\ y = 2s+1 \\ z = 3s \end{array}\right\}$
a) Finn avstanden mellom $l$ og $m$.
b) Finn skjæringspunktet mellom $l$ og $xy$ –planet.
c) Finn en parameterfremstilling for et plan $\alpha$ gjennom $m$ og som er parallelt med $l$.
Gitt et punkt $P = (2,3,4)$
d) Hva er avstanden fra $l$ til $P$?
e) Hva er avstanden fra $\alpha$ til $P$?

a) Retningsvektorer: $\vec{r_l} = [4,1,-1]$, $\vec{r_m} = [-2,2,3]$
$\vec{r_l} \times \vec{r_m} = [4,1,-1] \times [-2,2,3] = [5,-10,10] = 5[1,-2,2]$
Velger normalvektor: $\vec{n} = [1,-2,2]$
Punkt på $l$ : $P_l = (1,-1,1)$ $(t = 0)$
Punkt på $m$: $P_m = (2,1,0)$ $(s = 0)$
$\overrightarrow{P_lP_m} = [1,2,-1]$

Avstand mellom vindskjeve linjer: $d = \left|\frac{\overrightarrow{P_lP_m}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \left|\frac{[1,2,-1]\cdot[1,-2,2]}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\right| = \frac{5}{3} \approx 1.67$
b) $xy$ –plan: $z = 0 \Rightarrow -t+1 = 0 \Rightarrow t = 1$

): $S = (4 \cdot 1+1, 1-1, 0) = (5,0,0)$
c) Punkt på $m$, velger $s = 0$ : $P_m = (2,1,0)$ (Se a).)

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_m} + s\,\vec{r_m} + t\vec{r_l}$ gir: $\left\{\begin{array}{c} x = 2+4s-2t \\ y = 1+s+2t \\ z = -s+3t \end{array}\right\}$

d) $d_{lP} = \frac{\left|\overrightarrow{P_lP}\times\vec{r_l}\right|}{|\vec{r_l}|} = \frac{|[1,4,3]\times[4,1,-1]|}{|[4,1,-1]|} = \frac{|[-7,13,-15]|}{\sqrt{4^2+1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{7^2+13^2+15^2}}{\sqrt{18}} = \frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{443} \approx 4.96$
e) $d_{\alpha P} = \frac{\left|\overrightarrow{P_mP}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \left|\frac{[0,2,4]\cdot[1,-2,2]}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\right| = \frac{4}{3} \approx 1.33$

# V

En kuleflate $\kappa$ har ligningen $x^2+y^2+z^2-18y-4z-4x+8 = 0$
a) Finn sentrum $S$ og radius $R$ i kuleflaten $\kappa$.

b) Finn skjæringspunktene mellom linjen $l\ :\ \left\{\begin{array}{c} x = t \\ y = 1+2t \\ z = t \end{array}\right\}$ og kuleflaten $\kappa$.

Et plan $\alpha$ står normalt på $l$ . Snittsirkelen mellom dette planet og kuleflaten har radius $r = 3$.
c) Planet $\alpha$ deler kuleflaten $\kappa$ i to kulesegmenter, hva er overflaten til det minste av disse to kulesegmentene?
d) Hva er ligningen til planet $\alpha$?

a) $(x^2-4x+2^2)+(y^2-18y+9^2)+(z^2-4z+2^2) = -8+2^2+9^2+2^2 \Leftrightarrow$
$(x-2)^2+(y-9)^2+(z-2)^2 = 9^2$
$R = 9$ $S = (2,9,2)$

b) $(t-2)^2+(1+2t-9)^2+(t-2)^2 = 9^2 \Leftrightarrow 6t^2-40t+72 = 81 \Leftrightarrow 6t^2-40t-9 = 0 \Leftrightarrow$

$t = \frac{10}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{454} \approx -0.218 \qquad \vee \qquad t = \frac{1}{6}\sqrt{454} + \frac{10}{3} \approx 6.88$

$S_1 = (\frac{10}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{454}, 1 + 2 \cdot (\frac{10}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{454}), \frac{10}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{454}) =$
$(-\frac{1}{6}\sqrt{454} + \frac{10}{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{454} + \frac{23}{3}, -\frac{1}{6}\sqrt{454} + \frac{10}{3}) \approx (-0.218, 0.564, -0.218)$

$S_2 = (\frac{1}{6}\sqrt{454} + \frac{10}{3}, 1 + 2 \cdot (\frac{1}{6}\sqrt{454} + \frac{10}{3}), \frac{1}{6}\sqrt{454} + \frac{10}{3}) =$
$(\frac{1}{6}\sqrt{454} + \frac{10}{3}, \frac{1}{3}\sqrt{454} + \frac{23}{3}, \frac{1}{6}\sqrt{454} + \frac{10}{3}) \approx (6.88, 14.8, 6.88)$

c) Pythagoras: $h = 9 - \sqrt{9^2 - 3^2} = 9 - 6\sqrt{2}$

Overflate: $O = 2\pi Rh = 2\pi 9(9 - 6\sqrt{2}) = 18\pi\left(9 - 6\sqrt{2}\right) \approx 29.1$

d) $\vec{n} = [1, 2, 1]$

Trenger punkt $P$ i planet:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} \pm \frac{6\sqrt{2}}{|\vec{n}|}\vec{n} = [2, 9, 2] \pm \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}}[1, 2, 1] = [2 \pm \sqrt{12}, 9 \pm 2\sqrt{12}, 2 \pm \sqrt{12}]$

$\approx [5.46, 15.9, 5.46]$ eller $[-1.46, 2.07, -1.46]$

$\alpha$ :

$[1, 2, 1] \cdot [x - (2 \pm \sqrt{12}), y - (9 \pm 2\sqrt{12}), z - (2 \pm \sqrt{12})] = 0 \Leftrightarrow$

$x - (2 \pm \sqrt{12}) + 2(y - (9 \pm 2\sqrt{12})) + z - (2 \pm \sqrt{12}) = 0 \Leftrightarrow$

$x + 2y + z - (12\sqrt{3} + 22) = 0$ eller $x + 2y + z + (12\sqrt{3} - 22) = 0$

($x + 2y + z - 42.8 = 0$ eller $x + 2y + z - 1.22 = 0$)