UDIRs eksempeloppgave høsten 2008

Løsningsskisser

Del 1

Oppgave 1

a)

$f'(x) = 2\cos 3x + 2x(-\sin(3x)\cdot 3) =$ (Produktregel og kjerneregel på $\cos 3x$.)
$2\cos 3x - 6x\sin 3x$

b)

$f(x) = 3u^2, \quad u = e^{4x} + 1$

$u' = e^{4x}\cdot 4$ (Kjerneregel enda en gang...)

$f'(x) = 6u\cdot u' = 6u4e^{4x} = 24e^{4x}(e^{4x}+1)$

c)

1) $f(1) = \frac{2}{3} - 4 + 1 + 2 = -\frac{1}{3}$): Under x −aksen

2) $f'(x) = \frac{2}{3}3x^2 - 8x + 1 = 2x^2 - 8x + 1$
$f'(1) = 2 - 8 + 1 = -5$): Grafen stiger når $x = 1$.

3) $f''(x) = 4x - 8$
$f''(1) = 4 - 8 = -4$): MVH ($f'(x)$) minker når $x = 1$.

d)

Geometrisk rekke med $a_1 = 9, k = 0.1$

$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{9}{1-0.1} = 10$

e) $\int \frac{4}{x^2-1}dx = \int \frac{2}{x-1}dx - \int \frac{2}{x+1}dx =$ (Delbrøkoppspalting.)
$2\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C =$
$\ln(x-1)^2 - \ln(x+1)^2 + C = \ln(\frac{x-1}{x+1})^2 + C$

f)

1)
$f(x) = 24x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 24(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{12}{(\sqrt{x})^3}$

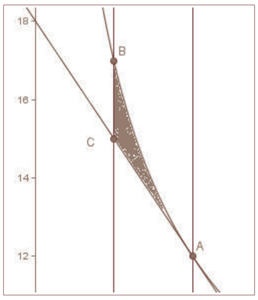
$f'(4) = -\frac{12}{(\sqrt{4})^3} = -\frac{3}{2}$

$f(4) = \frac{24}{\sqrt{4}} = 12$

Tangent: $y - f(4) = f'(4)(x-4) \Leftrightarrow y - 12 = -\frac{3}{2}(x-4) \Leftrightarrow$

$y - 12 = -\frac{3}{2}x + 6 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + 18$

2)
Tangent: $g(x) = -\frac{3}{2}x + 18$



Arealet $ABC = \int_2^4 (f(x) - g(x))dx = \int_2^4 (24x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x - 18)dx =$
$_2^4[48x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}x^2 - 18x] = 48 \cdot \sqrt{4} + \frac{3}{4}4^2 - 18 \cdot 4 - (48\sqrt{2} + \frac{3}{4}2^2 - 18 \cdot 2) =$
$69 - 48\sqrt{2} \approx 1.18$

g)

$\overrightarrow{AB} = [2,2,1], \qquad \overrightarrow{AC} = [1,0,1]$

$\cos\angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{[2,2,1]\cdot[1,0,1]}{\sqrt{2^2+2^2+1}\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle BAC = 45°$

h)

$y' + \cos x \cdot y = 0, \qquad y(0) = 4$

Separabel: $\frac{y'}{y} = -\cos x, \qquad y \neq 0$
$\int \frac{1}{y}dy = -\int \cos x dx \Leftrightarrow \ln|y| = -\sin x + D \Leftrightarrow y = Ce^{-\sin x}$ (Som inkluderer $y = 0$.)

$y(0) = 4 \Leftrightarrow 4 = Ce^{-\sin 0} \Leftrightarrow C = 4$

): $\quad y = 4e^{-\sin x} = \frac{4}{e^{\sin x}}$

Alternativt med integrerende faktor: $\quad IF = e^{\int \cos x dx} = e^{\sin x}$

$y'e^{\sin x} + ye^{\sin x}\cos x = 0 \Leftrightarrow (ye^{\sin x})' = 0 \Leftrightarrow ye^{\sin x} = C \Leftrightarrow y = Ce^{-\sin x}$

i)

$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = a_n + n + 2, \qquad n \in N$

1) $a_1 = 2$
$a_2 = 2 + 1 + 2 = 5$
$a_3 = 5 + 2 + 2 = 9$
$a_4 = 9 + 3 + 2 = 14$
$a_5 = 14 + 4 + 2 = 20$

2) Induksjonsbevis:

$n = 1: \qquad a_1 = 2$
$\frac{1(1+3)}{2} = 2 \qquad OK$

$n \to n+1:$
Må vise at: $\quad a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+3)}{2} = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$, når vi vet at $a_n = \frac{n(n+3)}{2}$

$a_{n+1} = a_n + n + 2 = \frac{n(n+3)}{2} + n + 2 = \frac{n(n+3)+2n+4}{2} = \frac{n^2+3n+2n+4}{2} = \frac{n^2+5n+4}{2} = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$ (Faktoriserer teller vha. abc-formel.)

(For moro skyld prøver vi å vise det eksplisitt:

Vi ser at differansene er $3, 4, 5, 6, \ldots$ altså den lineære følgen $d_n = 2 + n$

a_n er da summefølgen av differansefølgen, $a_n = a_1 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots =$
$a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = 2 + \frac{(n-1)}{2}(3 + (2 + (n-1))) = 2 + \frac{(n-1)(n+4)}{2} = \frac{4+n^2-n+4n-4}{2} = \frac{n^2+3n}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$)

Del 2

Oppgave 2

a)

Vanlig å skrive: $f(x) = 3\sin^3 x$, for å slippe parentesen...

Graf lenger ned.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = \pi$):(0,0) og $(\pi, 0)$

b)

Kjerneregel: $f(x) = 3u^3, u = \sin x \Rightarrow f'(x) = 9u^2 \cos x = 9\sin^2 x \cos x$

Faktorisering: $f(x) = 9(1 - \cos^2 x)\sin x = 9(1 - \cos x)(1 + \cos x)\sin x$

Tall-linjer for $1 - \cos x$, $1 + \cos x$ og $\sin x$ gir fortegnslinjen:

$-\frac{\pi}{2}$ 0 $\frac{\pi}{2}$ π $\frac{3\pi}{2}$
o——————o——————o- - - - - - o - - - - - - o

Topp-punkt: $(\frac{\pi}{2}, 3)$
Bunn-punkter: $(-\frac{\pi}{2}, -3)$, $(\frac{3\pi}{2}, -3)$
Terrassepunkter: $(0, 0)$, $(\pi, 0)$

c)

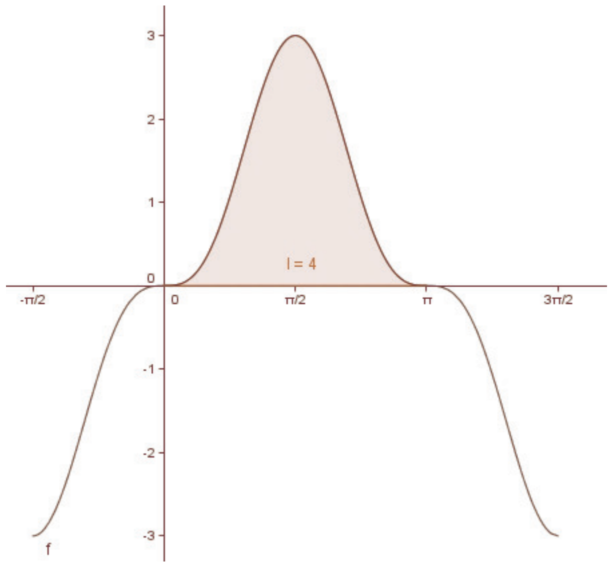
$F(x) = \int f(x)dx = a\cos^3 x + b\cos x + c$

$F'(x) = f(x) = 3a\cos^2 x(-\sin x) - b\sin x =$ (Derivasjon, kjerneregel.)
$-3a\sin x(1 - \sin^2 x) - b\sin x = -3a\sin x + 3a\sin^3 x - b\sin x =$
$(-3a - b)\sin x + 3a\sin^3 x$
Da må:
$-3a - b = 0 \land a = 1 \Leftrightarrow a = 1 \land b = -3$ *QED*

d)

$F(x) = \cos^3 x - 3\cos x + c$

Areal= $\int_0^{\pi} f(x)dx = F(\pi) - F(0) = \cos^3\pi - 3\cos\pi - (\cos^3 0 - 3\cos 0) = 4$



GeoGebra:

f(x)=Funksjon[3*(sin(x)) ^3,-pi/2,3*pi/2]
I=Integral[f(x),0,pi]

Oppgave 3

a)

Må tegne en perspektivtegning her...

$\overrightarrow{AB} = [-3, 4, 0]$

Avstand AB: $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$

b)

$\overrightarrow{AC} = [-3, 0, 5]$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 20e_x + 15e_y + 12e_z = [20, 15, 12]$$

$\overrightarrow{AO} = [-3, 0, 0]$

Volum $OABC = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AO}| = \frac{1}{6}|[20, 15, 12] \cdot [-3, 0, 0]| = |-10| = 10$

c)

Arealene regnes ut med tallverdien av vektorene som utspenner trekantene:

$F_{\Delta ABC} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{20^2 + 15^2 + 12^2} = \sqrt{769}$

$F_{\Delta AOC} = |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}| = |[3, 0, 0] \cdot [0, 0, 5]| = \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OC}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC})^2} =$
$\sqrt{3^2 5^2 - 0^2} = 15$

$F_{\Delta BOC} = |\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}| = |[0, 4, 0] \times [0, 0, 5]| = \sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2 |\overrightarrow{OC}|^2 - (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC})^2} =$
$\sqrt{4^2 5^2 - 0^2} = 20$

$F_{\Delta OAB} = |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = |[3, 0, 0] \times [0, 4, 0]| = \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} =$

$$\sqrt{3^2 4^2 - 0^2} = 12$$

$VS = 769$
$HS = 15^2 + 20^2 + 12^2 = 769 \qquad QED$

d)

Normalvektor: $\quad \overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [20, 15, 12]$

Med $\quad P = (x, y, z) \qquad$ og $A = (3, 0, 0)$ får vi: $\overrightarrow{AP} = [x - 3, y, z]$

Betingelsen $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0$ gir: $\quad [x - 3, y, z] \cdot [20, 15, 12] = 0$

): $\quad \alpha : \quad 20x + 15y + 12z - 60 = 0$

e) Normalvektor: $\quad \overrightarrow{n_\beta} = [1, 1, -1]$

$$\cos \angle \alpha, \beta = \frac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{|\overrightarrow{n_\alpha}||\overrightarrow{n_\beta}|} = \frac{[20,15,12] \cdot [1,1,-1]}{\sqrt{20^2+15^2+12^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{23\sqrt{3}\sqrt{769}}{2307} \approx 0.4789$$

$\angle \alpha, \beta \approx 61.4$

f)

$\overrightarrow{AB} = [-3, 4, 0], \qquad \overrightarrow{AC} = [-3, 0, t]$

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-3, 4, 0] \times [-3, 0, t] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & t \end{vmatrix} = 4te_x + 3te_y + 12e_z =$$

$[4t, 3t, 12]$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0 \Leftrightarrow [x - 3, y, z] \cdot [4t, 3t, 12] = 0 \Leftrightarrow 4tx + 3ty + 12z - 12t = 0 \Leftrightarrow$$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{t} = 1 \qquad QED$

g)

Planet går mot: $\quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x + 3y - 12 = 0$

Har normalvektor $\quad [4, 3, 0]$ og er derfor
-Parallelt med z −akse
-Normalt på xy −plan
-$4x + 3y - 12 = 0$ er 2-dimensjonal ligning for skjæringslinjen med xy −planet.

Oppgave 4 - Alternativ I

a)

Sum krefter: $\quad F = mg - k_1 v(t)$
$\qquad ma = mv'(t)$

Newtons 2dre lov gir da:
$$mg - k_1 v = mv'(t) \Leftrightarrow v'(t) + \frac{k_1}{m} v(t) = g$$

b)

$v' + \frac{16}{80} v = 10 \qquad [\mathrm{m/s^2}]$
$v' + \frac{1}{5} v = 10$

Løser som separabel ligning, men kan også bruke integrerende faktor...

$\int \frac{1}{50-v}dv = \frac{1}{5}\int dt \Leftrightarrow -\ln|50-v| = \frac{t}{5} + D \Leftrightarrow 50 - v = Ce^{-\frac{t}{5}} \Leftrightarrow$
$v = 50 - Ce^{-0.2t}$

$v(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = 50 - C \Leftrightarrow C = 50$

): $\quad v(t) = 50 - 50e^{-0.2t} = 50(1 - e^{-0.25})$ [m/s], $\quad t$ i sekunder.

c)

Fart: $\quad v(4) = 50 - 50e^{-0.2\cdot 4} \approx 28$ [m/s]

Akselerasjon: $v'(t) = -50(-0.2)e^{-0.2t} = 10e^{-0.2t}$ [m/s^2]

$v'(4) = 10e^{-0.2\cdot 4} \approx 4.5$ [m/s^2]

d)

Startbetingelse for ny situasjon: $\quad v(5) = 50 - 50e^{-0.2\cdot 5} \approx 32$ [m/s]

Sum krefter: $\quad F = mg - k_2v^2$

gir: $\quad v' + \frac{k_2}{m}v^2 = g$

OBS: Oppgaven er upresis, men fra e) ser vi at de opererer med en ny t som er null, når den gamle t var 5!

Initialbetingelse: $\quad v(0) = 32$

Ligning: $\quad v' + \frac{1}{10}v^2 = 10$ [m/s^2], $\quad$ der t i sekunder.

e)

Separabel: $\quad 10v' + v^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{v'}{100-v^2} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow$

Delbrøkoppspalting gir: $\quad \frac{1}{20}\left(\frac{1}{10-v}v' + \frac{1}{10+v}v'\right) = \frac{1}{10} \Leftrightarrow$

$\left(\frac{1}{10-v} + \frac{1}{10+v}\right)v' = 2 \qquad QED$

f)

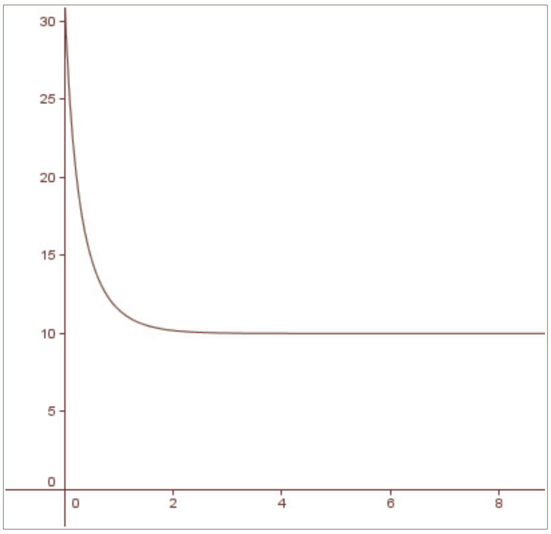
$\int \frac{1}{10-v}dv + \int \frac{1}{10+v}dv = 2\int dt \Leftrightarrow -\ln|10-v| + \ln|10+v| = 2t + D \Leftrightarrow$

$\ln\left|\frac{10+v}{10-v}\right| = 2t + D \Leftrightarrow \frac{10+v}{10-v} = Ee^{2t} \Leftrightarrow 10 + v = 10Ee^{2t} - vEe^{2t} \Leftrightarrow$

$v + vEe^{2t} = 10Ee^{2t} - 10 \Leftrightarrow v(1 + Ee^{2t}) = 10(Ee^{2t} - 1) \Leftrightarrow$
$v = 10\frac{Ee^{2t}-1}{Ee^{2t}+1} = 10\frac{1-Ce^{-2t}}{1+Ce^{-2t}}$

$v(0) = 32 \Leftrightarrow 32 = 10\frac{1-C}{1+C} \Leftrightarrow C \approx -0.52$

$v(t) = 10\frac{1+0.52e^{-2t}}{1-0.52e^{-2t}}$ [m/s], t i sekunder



Kontroll: Når farten blir konstant har vi akselerasjon lik null:

$$mg - k_2 v_\infty^2 = 0 \Leftrightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k_2}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 10}{8}} = 10 \text{ [m/s]}$$

Oppgave 4 - Alternativ II

$$y' - \frac{x}{x^2-1} y = 0, \qquad x \neq \pm 1$$

Et poeng i denne oppgaven er at betingelsen gir to diskontinuiteter og tre intervaller for løsningen.
Man skal også være forsiktig med tallverdi og ln-funksjonen her...

Regel for tallverdi:

$a \geq 0$	$\lvert a \rvert = a$
$a < 0$	$\lvert a \rvert = -a$

a)
Separabel: $\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{x}{x^2-1} dx, \qquad y \neq 0$

$\ln\lvert y \rvert = \frac{1}{2} \ln\lvert x^2 - 1 \rvert + D$ (Integrasjon med variabelskifte: $u = x^2 - 1$)

$$y = C(e^{\ln\lvert x^2-1 \rvert})^{\frac{1}{2}} = C\sqrt{\lvert x^2 - 1 \rvert}$$

(Kan også gjøres med integrerende faktor: $IF = e^{-\int \frac{x}{x^2-1} dx} = e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2-1)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$)

1)
Når $x \in \langle -1, 1 \rangle$ bruker vi:$\lvert x^2 - 1 \rvert = -(x^2 - 1) = 1 - x^2$, så løsningen i dette intervallet blir:

$$y = C\sqrt{1 - x^2}$$

2), 3)
Graf: Se lenger ned.

b)
1) Når $x \in \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$ bruker vi: $\lvert x^2 - 1 \rvert = +(x^2 - 1) = x^2 - 1$

): $\quad y = C\sqrt{x^2 - 1}$

2), 3)

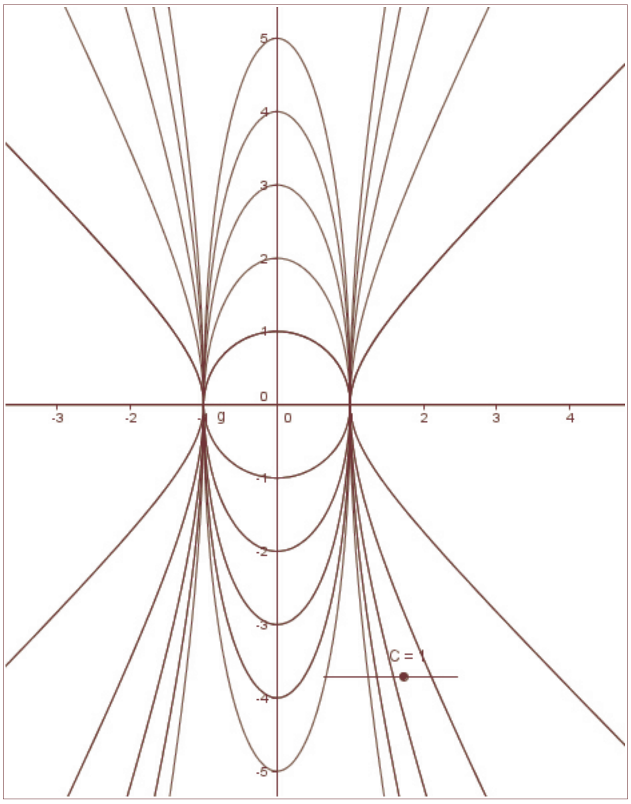
Graf: Se lenger ned.

Poenget med a) og b) er å sette sammen en løsning i hele definisjonsområdet, som blir slik:

$$\left\{ \begin{array}{c} y = C_1\sqrt{x^2-1}\text{ , når } x < -1 \\ y = C_2\sqrt{1-x^2}\text{ , når } x \in \langle -1, 1\rangle \\ y = C_3\sqrt{x^2-1}\text{ , når } x > 1 \end{array} \right\}$$

Spørsmål c) viser at de som har laget oppgaven ikke er klar over at man må ha en initialbetingelse i hvert intervall, og at man ikke kan bruke samme C i alle tre intervaller!

Hvis vi multipliserer ligningen med (x^2-1) får vi en annen ligning: $(x^2-1)y' - xy = 0$. ***Denne*** ligningen er definert i et ***sammehengende intervall*** og har også løsninger som er henger sammen i hele intervallet: $y = C\sqrt{|x^2-1|}$ og en initialbetingelse vil da bestemme C –ene i de to andre intervallene, men de må ***regnes ut hver for seg*** slik at den deriverte av løsningen (y') er kontinuerlig for $x = -1$ og $x = 1$. (Ikke knekk på kurven i $x = \pm 1$.)
Som dere skjønner,dette med eksistens av løsninger, hvordan man skjøter sammen diskontinuerlige løsninger og hvorfor initialbetingelser bare gjelder i et kontinuerlig intervall er avansert universitetsstoff, og jeg anser det som en ren glipp at UDIR har gitt denne oppgaven i et eksempelsett. Jeg regner derfor med at denne type betraktninger er uaktuelle til eksamen...



c)
Separabel: $\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{2}{x^2-1}dx$

Delbrøksoppspaltning gir: $\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+1}dx \Leftrightarrow$

$$\ln|y| = \ln|x-1| - \ln|x+1| + D \iff \ln|y| = \ln\frac{|x-1|}{|x+1|} + D \iff$$
$$y = C\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

Initialbetingelsen gjelder i intervallet $\langle -1, 1\rangle$: $\quad y(0) = C$

så i dette intervallet har vi: $\quad y = C(-\frac{x-1}{x+1}) = C\frac{1-x}{1+x}$

Hva C er i de andre intervallene vet vi ikke før vi får to initialbetingelser til, en i hvert intervall!

De som har laget oppgaven later ikke til å ha skjønt dette...
Spørsmålene er misvisende og må sies å være direkte feil, da
1) spesiell løsning kan ikke finnes med bare en initialbetingelse
2) et valg av den oppgitte C er ikke nok til å grafe løsningen y i hele definisjonsområdet

Uten tallverdi får vi:

$$\left\{ \begin{array}{c} y = C_1\frac{x-1}{x+1}, \text{når } x < -1 \\ y = C\frac{1-x}{1+x}, \text{når } x \in \langle -1, 1\rangle \\ y = C_2\frac{x-1}{x+1}, \text{når } x > 1 \end{array} \right\}$$

2)
Meningsløst spørsmål: Velger vi en C kan vi bare grafe i intervallet $\langle -1, 1\rangle$.
I de to andre intervallene er C_1 og C_2 fortsatt ukjente, men de som har laget oppgaven tror åpenbart at det er en C for alle intervaller...
Uansett, omtrent slik ser det ut: