Heldagsprøve R2 - 27.04.12

Del 1 - Uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene:
1) $f(x) = x^2 \ln x$ 2) $g(x) = 3\cos(4x)$ 3) $h(x) = \frac{a^x}{\ln x}$

b) Bestem integralene:
1) $\int xe^{-2x}dx$

2) $\int \frac{x}{x^2-9}dx$

3) $\int \frac{1}{x^2-9}dx$

4) $\int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}dx$

c) Vi har gitt rekken:
$5 + 10 + 15 + 20 + \ldots$
Skriv opp delsummene S_1, S_2, S_3, S_4 og bestem S_{100}.

d) Vi har gitt rekken:
$1 + 6 + 16 + 31 + 51 + \ldots$
Skriv opp delsummene S_1, S_2, S_3, S_4 og bestem $S_{100.}$

e) Bestem parameterene a, b, c og d i funksjonen
$f(x) = a\sin(bx + c) + d, \quad x \in [0, 24]$
hvis vi vet at $f(x)$ har største verdi 5, minste verdi 1, periode 24 og går gjennom punktet $(0, 4)$.

f) Løs differensialligningene:
1) $y' - 2y = 0$ når $y(0) = 1$
2) $y' - 2y = x$ når $y(0) = 1$
3) $y'' + 2y' + 10y = 0$ når $y(0) = 1$

g) Gitt punktene $A(1, 0, 2)$, $B(3, 2, 4)$ og $C(5, 6, 8)$.
1) Bestem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$
2) Bestem arealet av trekanten ABC.
3) Bestem volumet av pyramiden $ABCT$, der pyramiden har ABC som grunnflate og $T = (0, 7, 3)$ som toppunkt.

Del 2 - Med hjelpemidler

Oppgave 2

Funksjonen $f(x)$ er gitt ved:

$$f(x) = 3\sin\left(\tfrac{\pi}{15}x - \tfrac{\pi}{3}\right) + 2, \qquad x \in \langle 0, 30\rangle$$

a) Tegn grafen til $f(x)$.
b) Bestem ved regning eventuelle null-, ekstremal- og vendepunkter til $f(x)$.
c) Skriv om funksjonen til formen:

$$f(x) = a\cos(bx + c) + d$$

Oppgave 3

Vi har gitt funksjonen

$$f(x) = 2\sin^2 x + \sin x - 1, \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$$

Bestem ved regning funksjonens nullpunkter og ekstremalpunkter.

Oppgave 4

En fabrikk lager et skaft til et skrujern.
Skaftene ser ut som omdreiningslegemet vi får når vi dreier grafen til

$$f(x) = 3\sqrt{x}\,e^{-\frac{x}{4}}, \qquad 0 \le x \le 6$$

360° om x-aksen. Vi bruker 1 cm som enhet på begge akser.
a) Tegn en skisse av skaftet.
b) Bestem ved regning diameteren til skaftet der skaftet er bredest.
c) Bestem ved regning volumet av skaftet.

Oppgave 5

Ligningen til en kuleflate er gitt ved

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 8z + 4 = 0$$

a) Finn sentrum og radius i kulen.
b) En rett linje l gjennom sentrum er gitt ved:

$$l : \left\{ \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 3 + 2t \\ z &= 4 + 2t \end{aligned} \right\}$$

Finn skjæringspunktene mellom l og kuleflaten.

c) Planene α og β tangerer kulen i hvert av skjæringspunktene fra b).
Bestem ligningene til planene α og β.

d) Et plan γ er parallelt med planene α og β og deler kuleflaten i to deler slik at den minste delens overflate er en fjerdedel av den totale kuleflaten.
Bestem ligningen for planet γ, gitt at γ er den muligheten som ligger

lengst fra Origo.

Oppgave 6

En mindre by blir rammet av en influensaepidemi som kan beskrives av differensialligningen:

$$y' = 0.0091y(1000 - xy) \text{ [antall syke]}, \qquad x \in [0, \rightarrow\rangle \text{ [måneder]}$$

Vi legger merke til at x forekommer på høyre siden av ligningen, slik at dette *ikke* er en logistisk ligning, så den lar seg ikke løse med de metodene vi har lært.

a) Vis at funksjonen $y = \frac{1000}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}}$ har den deriverte:

$$y' = 1000 \frac{-1 + 9.1Ce^{-9.1x}}{(x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x})^2}$$

b) Vis at funksjonen $y = \frac{1000}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}}$ tilfredsstiller differensialligningen

$$y' = 0.0091y(1000 - xy)$$

for alle reelle tall C.

c) Forklar hvorfor $y \to 0$ når $x \to \infty$.

d) I utgangspunktet har vi en syk, som smitter alle de andre, slik at vi har initialbetingelsen $y(0) = 1$.
Finn den spesielle løsningen av differensialligningen.

e) Hvor mange er syke på det meste, og når skjer det?

Til slutt, som en liten utfordring, skal vi løse differensialligningen direkte, og skriver den på formen:

$$y' - 9.1y = -0.0091xy^2$$

Dividerer vi med $-y^2$, får vi: (Hvis $y = 0$ har vi en triviell løsning $y = 0$.)

$$-\frac{1}{y^2}y' + 9.1\frac{1}{y} = 0.0091x$$

Så innfører vi en ny variabel $u = \frac{1}{y}$.

f) Forklar hvorfor $u' = -\frac{1}{y^2}y'$

Da kan vi skrive om ligningen til:

$$u' + 9.1u = 0.0091x$$

g) Løs denne differensialligningen.

h) Bytt ut u med $\frac{1}{y}$ og vis at $y = \frac{1000}{x - \frac{1}{9.1} + Ce^{-9.1x}}$.