R2 - Eksamen V09

Løsningsskisser

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x) = 2u^3, \quad u = \ln x + 1$
Kjerneregel: $f'(x) = 6u^2 \frac{1}{x} = \frac{6}{x}(\ln x + 1)^2$

b) $f(x) = x\cos x$

1) $f(\pi) = \pi\cos(\pi) = -\pi$): Under x –aksen når $x = \pi$

2) Multiplikasjonsregel: $f'(x) = 1\cos x + x(-\sin x) = \cos x - x\sin x$

$f'(\pi) = \cos(\pi) - \pi\sin(\pi) = -1 - \pi \cdot 0 = -1$): Grafen faller når $x = \pi$

c) Geometrisk rekke med $k = \frac{1}{3}$.
Konvergent da $-1 < k < 1$

$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6}{3-1} = 3$

d) $\overrightarrow{AB} = [1,2,-5], \quad \overrightarrow{AD} = [1,2,t-7]$

1) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow [1,2,-5] \cdot [1,2,t-7] = 0 \Leftrightarrow$
$1 + 4 - 5t + 35 = 0 \Leftrightarrow 40 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 8$

2) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow [2,4,t-5] = k[1,2,-5] \Leftrightarrow$
$2 = k \wedge 4 = 2k \wedge t-5 = -5k \Leftrightarrow k = 2 \wedge t = -10+5 \Leftrightarrow$
$k = 2 \wedge t = -5$

e) Integrerende faktor: $IF = e^{\int 4x dx} = e^{2x^2}$
$y'e^{2x^2} + ye^{2x^2}4x = 0 \Leftrightarrow (ye^{2x^2})' = 0$
$ye^{2x^2} = C$
Generell løsning: $y = Ce^{-2x^2}$

(Eller som separabel:
$\frac{y'}{y} = -4x$
$\int \frac{y'}{y} dx = -4\int x dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = -4\int x dx$
$\ln|y| = -4\frac{x^2}{2} + C_1 = -2x^2 + C_1$
$|y| = e^{-2x^2+C_1} = e^{-2x^2}e^{C_1} = C_2e^{-2x^2}$

Generell løsning: $y = Ce^{-2x^2}$)

Initialbetingelse gir: $y(0) = 5 \Leftrightarrow Ce^0 = 5 \Leftrightarrow C = 5$

Spesiell løsning: $y = 5e^{-2x^2}$

f)

1) Delvis integrasjon: $\int x\sin(2x)dx = -\frac{\cos(2x)}{2}x - \int -\frac{\cos(2x)}{2}1dx =$
$-\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\int\cos(2x)dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\frac{\sin(2x)}{2} + C =$
$\frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{x}{2}\cos(2x) + C$

2) $\int \frac{4}{x^2-4}dx = \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x+2}dx =$ (Delbrøkoppspaltning)
$\ln|x-2| - \ln|x+2| + C = \ln|\frac{x-2}{x+2}| + C$

(Noen foretrekker $\ln|\frac{x-2}{x+2}| + \ln D = \ln|D\frac{x-2}{x+2}|$)

Oppgave 2

a)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-1,2,2] \times [0,1,2] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = [2,2,-1]$$

$$A_{ABC} = \frac{|[2,2,-1]|}{2} = \frac{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}{2} = \frac{3}{2} \qquad QED$$

b)

$$V_{ABCD} = \frac{(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}}{6} = \frac{[2,2,-1]\cdot[3,1,-3]}{6} = \frac{6+2+3}{6} = \frac{11}{6} \approx 1.83$$

c)

Normalvektor: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [2,2,-1]$

Bruker punktet A og $P(x,y,z)$:
$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow$
$[x-1, y-0, z-0] \cdot [2,2,-1] = 0 \Leftrightarrow$
$2x - 2 + 2y - z = 0 \Leftrightarrow$
): $\alpha : 2x + 2y - z - 2 = 0$

Del 2

a) Initialbetingelse: $y(0) = 38$ [°]

$y'(t)$ er endringen i temperatur per tidsenhet [°/time]

Varmelæren sier at varme går fra høyeste temperatur til laveste, så temperaturen $y(t)$ er avtagende,
altså negativ.

b) Newtons temperaturlov:
Veksthastigheten i $y(t)$ er proprosjonal med differansen $y(t) - 21$
eller:
$$y' = -k(y - 21)$$

c) Initialbetingelse: $y(0) = 38$ [°]
da temperaturen i utgangspunktet ($t = 0$) er 38°.

Separabel: (Kan også bruke integrende faktor på: $y' + ky = 21k$)

$$\int \frac{y'}{y-21}\,dt = -k\int dt \Leftrightarrow \ln|y - 21| = -kt + C_1 \Leftrightarrow$$
$$|y - 21| = e^{-kt+C_1} = e^{-kt}e^{C_1} = Ce^{-kt} \Leftrightarrow$$

Generell løsning: $y = 21 + Ce^{-kt}$

$y(0) = 38 \Leftrightarrow 38 = 21 + Ce^0 \Leftrightarrow C = 17$

Spesiell løsning: $y = 21 + 17e^{-kt}$

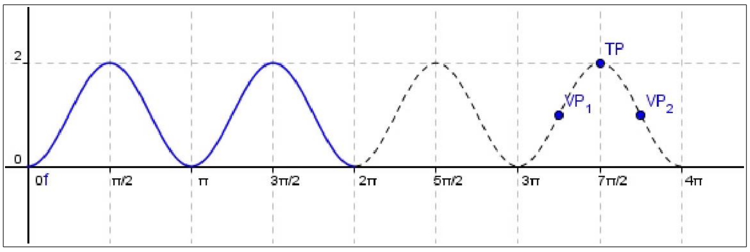
d) $y(3) = 27 \Leftrightarrow 27 = 21 + 17e^{-k3} \Leftrightarrow e^{-k3} = \frac{27-21}{17} = \frac{6}{17} \Leftrightarrow$
$-k3 = \ln\frac{6}{17} \Leftrightarrow k = \frac{\ln\frac{6}{17}}{-3} \approx 0.347$

e) $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}(21 + 17e^{-0347t}) = 21$ [°] da $e^{-0.347t} \to 0$ når $t \to \infty$

Som forventet, i det lange løp vil temperaturen i vannet i badekaret gå mot romtemperaturen.

Oppgave 4 Alternativ I

a) $f(x) = 2\sin^2 x = 2(\frac{1-\cos(2x)}{2}) = 1 - \cos(2x), \quad x \in [0, 2\pi\rangle$



b) Uten graf ved regning:
$f(x) = 1 - \cos(2x) = 1 - \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = 1 + \sin(2x - \frac{\pi}{2})$

$(\cos u = \sin(\frac{\pi}{2} - u)$ og $\sin(u) = -\sin(-u)$)

Avlesing av graf:
Likevektslinje: $\frac{2-0}{2} = 1$
Amplitude: $\frac{0+2}{2} = 1$
Periode: $T = \pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$
Faseforskyving: $\varphi = \frac{\pi}{4}$

): $f(x) = 1 + 1\sin(2(x - \frac{\pi}{4})) = 1 + \sin(2x - \frac{\pi}{2})$

c) $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = \sin 2x \cos \frac{\pi}{2} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{2} = -\cos 2x$

$1 + \sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 1 - \cos 2x =$
$1 - (1 - 2\sin^2 x) = 2\sin^2 x \qquad QED$

d) Maks: $1 + 1 = 2$
når: $2x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + k\pi$

Topp-punkt: $(\frac{7\pi}{2}, 2)$

Min: $1 - 1 = 0$
når: $2x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = 2\pi + k\pi$

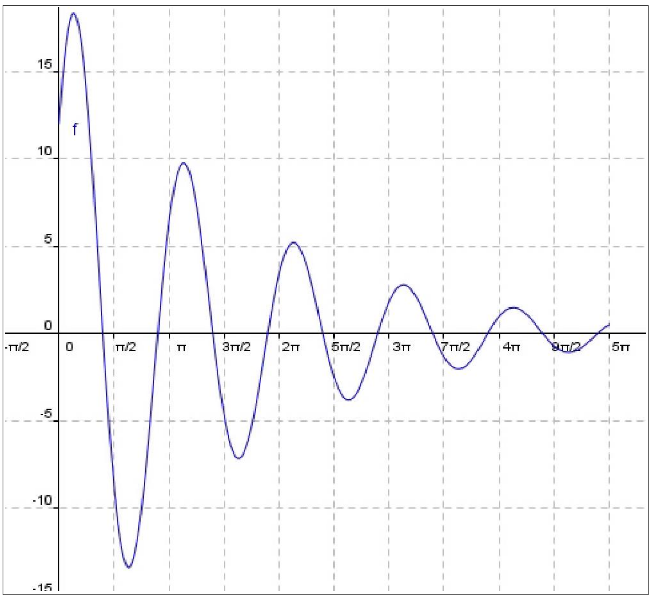
Ingen bunn-punkt i $\langle 3\pi, 4\pi \rangle$

Vendepunkt:
$2x - \frac{\pi}{2} = 0 + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

): $(\frac{13\pi}{4}, 1), (\frac{15\pi}{4}, 1)$

Oppgave 4 Alternativ 2

a)



b) Det står at det er en fordel å bruke digitale verktøy i denne oppgaven, så ikke gjør dette ved regning,
det tar for lang tid...

Lommeregner:

Y1=4e ^(-.2X)(4sin(2X)+3cos(2X))

CALC, maximum gir: $TP = (0.414, 18.3)$

CALC, minimum gir: $BP = (1.98, -13.4)$

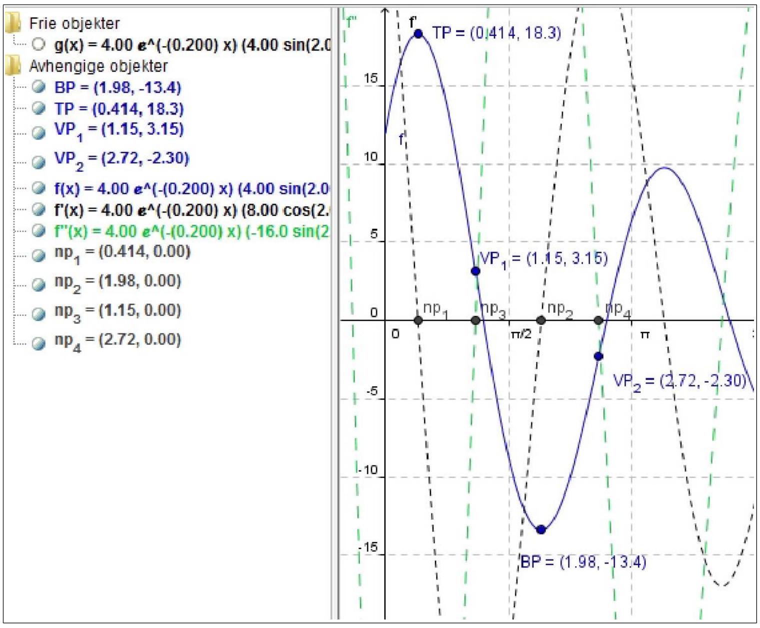
Vendepunktene er når $f'(x)$ har topp- og bunnpunkter, så på lommeregneren lager du den deriverte slik:

Y2=nDeriv(Y1,X,X)

Så bruker du CALC, maximum og CALC, minimum på Y2 (= $f'(x)$) for å finne x-verdiene til vendepunktene.

VP : $(1.15, 3.15), (2.72, -2.30)$

GeoGebra:



Kommandoer:

Kommando:	Kommentar:
f(x)=4 exp(-0.2 x) (4 sin(2 x)+3 cos(2 x))	Legger inn funksjon. (Blå.)
f'(x)	Legger inn den deriverte. (Svart.)
f''(x)	Legger inn den dobbeltderiverte. (Grønn.)
np_1=Nullpunkt[f',0,1]	Finner første nullpunkt for derivert,
TP=(x(np_1),f(x(np_1)))	som gir topp-punkt.
np_2=Nullpunkt[f',1,3]	Andre nullpunkt for derivert,
BP=(x(np_2),f(x(np_2)))	som gir bunn-punkt.
np_3=Nullpunkt[f'',0.5,1.5]	Første nullpunkt for dobbeltderivert,
VP_1=(x(np_3),f(x(np_3)))	som gir første vendepunkt.
np_4=Nullpunkt[f'',1.5,3]	Andre nullpunkt for dobbeltderivert,
VP_2=(x(np_4),f(x(np_4)))	som gir andre vendepunkt.

c) $4\sin 2x + 3\cos 2x = \sqrt{4^2+3^2}\,\sin(2x+\phi)$, $\qquad \tan\phi = \frac{3}{4} \wedge \phi$ i første kvadrant

Gir: $\quad 5\sin(2x+0.644)$

Så vi får: $\quad f(x) = 4e^{-0.2x}5\sin(2x+0.644) = 20e^{-0.2x}\sin(2x+0.644)$

$\phi = 0.644 \qquad$ og $\qquad K = 20$

d) $\quad y'' + ay' + by = 0 \qquad$ gir karakteristisk ligning $r^2 + ar + b = 0$

med løsning:

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\cdot 1\cdot b}}{2\cdot 1} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-4b}}{2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\sqrt{-1} = \alpha \pm \beta i$$

Så $\alpha = -0.2 = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 0.4$

$$\beta = 2 = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{4b-a^2} = 4 \Leftrightarrow 4b - a^2 = 16 \Leftrightarrow b = \frac{16+0.4^2}{4} = 4.04$$

Oppgave 5

a)

i	1	2	3	4	5	6	7	8
S_i	1	4	10	20	35	56	84	119
a_i	1	3	6	10	15	21	28	35

b) $\quad$ Trekanttall nr n er n rader med en mer i hver rad, altså $1+2+3+\ldots+n$

De naturlige tallene er en aritmetisk rekke, så denne summen blir $a_n = (1+n)\frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

c) $\quad$ Dette er et andregradsuttrykk, så vi vet at S_n må være tredjegrad, så egentlig holder det med regresjon på 4 ledd, 5 ledd er unødvendig...

LR: $\quad$ STAT,EDIT legger inn L1={1,2,3,4,5} og L2={1,4,10,20,35}

STAT,CALC,CubicReg L1,L2 gir:

a=.166666... $\qquad$ Tilnærming av $\frac{1}{6}$

b=.5

c=.333333... $\qquad$ Tilnærming av $\frac{1}{3}$

d=0

Så vi har: $\quad S_n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n + 0 = \frac{n^3+3n^2+2n}{6} = \frac{n(n^2+3n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Dette er de såkalte tetraedertallene, se oppgave 213 i læreboken på side 333!

d)

Induksjonsbevis:

Trinn 1: $\quad n = 1$

$S_1 = \frac{1(1+1)(1+2)}{6} = 1 \qquad OK$

Trinn 2: $\quad n \to n+1$

Må vise at $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)(n+1+2)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} =$
$\frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)}{6}(n+3) =$ (Felles faktor!)
$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$ QED