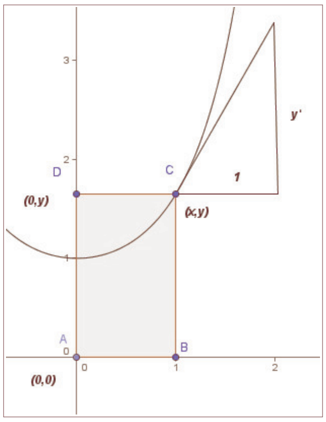
R2 - 6.1 - 6.5 - Differensialligninger

Løsningsskisse

I

a) Vis at $y = \cos x + x$ er en spesiell løsning av differensialligningen: $y' + \sin x = 1$
b) Still opp en differensialligning som uttrykker at den deriverte av en funksjon er lik arealet av rektanglet definert ved punktene: $(0,0), (x,0), (x,y)$ og $(0,y)$, der x og y er koordinatene til et punkt på grafen til funksjonen.

a) $y' = -\sin x + 1$
Innsatt:
$VS = y' + \sin x = (-\sin x + 1) + \sin x = 1$
$HS = 1$
QED
b)



Areal av rektangel ABCD: xy (Grunnlinje•Høyde)
Krav gir differensialligning: $y' = xy$
(Se også II b.)

II

Løs differensialligningene:
a) $y' = x + \frac{1}{x}$
b) $y' = xy$
c) $y' + \frac{1}{x}y = x$

a) Eksakt: $y = \int (x + \frac{1}{x})dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$

b) (Se I b).)
Separabel: $\frac{y'}{y} = x \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int x dx \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + D \Leftrightarrow$
$|y| = e^{\frac{x^2}{2} + D} = e^{\frac{x^2}{2}} e^D = Ee^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow$
$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$

c) i) Direkte med multiplikasjonsregel for derivasjon:
$xy' + y = x^2 \Leftrightarrow (xy)' = x^2 \Leftrightarrow xy = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow$
$y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$

ii) Hvis man ikke ser dette; integrerende faktor: $IF = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

$xy' + y = x^2$, resten som i i)

III

Hvis en person blir liggende i vann som har temperaturen 0°, vil kroppstemperaturen y [°C] under visse
betingelser minke slik at ved et tidspunkt t er $y'(t) = -0.012y(t)$, der t er målt i minutter.
a) En isfisker falt i en råk, og kroppstemperaturen sank i henhold til modellen $y' = -0.012y$.
Hvor lang tid tok det før kroppstemperaturen hadde sunket til 25 °C?
b) Differensialligningen $y' = -0.012y$ er et spesialtilfelle av Newtons modell som sier at temperaturen $T(t)$
i et system faller i henhold til modellen $T'(t) = -k(T(t) - T_{vann})$, der T_{vann} er temperaturen i vannet.
Hva er betingelsen for at den forenklede modellen vi brukte i a) skal gi samme resultat som Newtons mer
generelle modell?

a) Separabel: $\frac{y'}{y} = -0.012 \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = -0.012\int dt \Leftrightarrow \ln|y| = -0.012t + D \Leftrightarrow$
$|y| = e^{-0.012t+D} = e^{-0.012t}e^D \Leftrightarrow y = Ce^{-0.012t}$

Initialbetingelse: $y(0) = 37$ gir: $37 = Ce^0 \Leftrightarrow C = 37$

(Jeg burde skrevet at $y(0) = 37$ i oppgaven, men det er jo rimelig naturlig å anta det...)

): $y(t) = 37e^{-0.012t}$ [°C], t [min]

Temperaturen er 25°C når:
$y(t) = 25 \Leftrightarrow 25 = 37e^{-0.012t} \Leftrightarrow e^{-0.012t} = \frac{25}{37} \Leftrightarrow -0.012t = \ln\frac{25}{37} \Leftrightarrow$
$t = \frac{\ln\frac{25}{37}}{-0.012} \approx 33$ [min] (-0.012 har to gjeldende siffer, naturlig å bruke det...)

b) Med tallene i dette spesielle tilfelle får vi:

$T'(t) = -k(T(t) - 0) \Leftrightarrow T'(t) = -kT(t)$
som tilsvarer $y' = -0.012y$ med $y = T(t)$ og $k = 0.012$

Betingelsen for bruk av den forenklede modellen er altså at $T_{vann} = 0$°C.

(Med feks. $T_{vann} = 5$ ville vi fått $T'(t) = -k(T(t) - 5)$ og måtte brukt $y' = -0.012(y - 5)$)

IV

Toricellis differensialligning; $h' = -k\sqrt{h}$, beskriver hvordan vann-nivået $h(t)$ varierer med tiden t, når en tank med væske tømmes gjennom et hull i bunnen.

Vanntank

Jeg fyllte opp tanken til 15 cm, åpnet hullet og fikk følgende måleserie:

t**:[sek]**	$h(t)$**:[cm]**
0	15
3.92	10
10.6	5
15.2	2.5
ca. 25	0 (tom)

a) Løs differensialligningen $h' = -k\sqrt{h}$ og vis at løsningen blir $h(t) = (C - \frac{k}{2}t)^2$

b) Forklar hvorfor den spesielle løsningen som gjelder for min måleserie blir
$h(t) = (\sqrt{15} - \frac{k}{2}t)^2$

c) Bruk måleserien til å bestemme parameteren k. (Avhenger av diameter i tanken, diameter i hullet mm.)

d) Hvor lang tid vil det ta å tømme tanken hvis jeg fyller den opp til 25 cm istedenfor 15 cm før jeg åpner hullet?

a) Separabel: $\int \frac{1}{\sqrt{h}}dh = -k\int dt \Leftrightarrow \int h^{-\frac{1}{2}}dh = -k\int dt \Leftrightarrow \frac{h^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -kt + D \Leftrightarrow$
$2\sqrt{h} = -kt + D \Leftrightarrow h = (C - \frac{k}{2}t)^2$

b) Initialbetingelse (i henhold til tabell med måleverdier): $h(0) = 15 \Leftrightarrow$
$15 = (C - \frac{k}{2} \cdot 0)^2 \Leftrightarrow C = \sqrt{15}$ (Negativ verdi forkastes.)

): $h(t) = (\sqrt{15} - \frac{k}{2}t)^2$

c) Enklest (REMA1000: "Det enkleste er ofte det beste.") å bruke $h(25) = 0$, men man kan også bruke andre verdier eller gjennomsnitt av disse, men det tar litt tid og gir ikke noe særlig bedre modell...)

$h(25) = 0 \Leftrightarrow 0 = (\sqrt{15} - \frac{k}{2}25)^2 \Leftrightarrow k = \frac{2\sqrt{15}}{25} \approx 0.310$

): $h(t) = (\sqrt{15} - 0.155t)^2$

(Her kan man sjekke modellen mot regresjonsmodell på lommeregner:
Modell: $h(t) = (\sqrt{15} - 0.155t)^2 = 0.0240t^2 - 1.20t + 15.0$
Regresjon: $h(t) = 0.0235t^2 - 1.17t + 14.7$ (QuadReg))

d) Initialbetingelse: $h(0) = 25$ gir $h(t) = (\sqrt{25} - \frac{k}{2}t)^2 = (5 - 0.155t)^2$
(Forutsetter at k er den samme.)

Tømmetid gitt av:

$h(t) = 0 \Leftrightarrow (5 - 0.155t_{tom})^2 = 0 \Leftrightarrow t_{tom} = \frac{5}{0.155} \approx 32$ [sek]

V

Differensialligningen $yy' + y^2 = x$ er ulineær og kan ikke løses med de vanlige teknikkene.
Vi prøver å skifte variabel til $u = y^2$.
a) Forklar hvorfor $u' = 2yy'$
b) Vis at differensialligningen kan omformes til: $u' + 2u = 2x$
c) Løs differensialligningen. (Finn først u, deretter $y = \pm\sqrt{u}$.)

a) Kjerneregel: $u = y^2$, der $y = y(x) \Rightarrow u' = 2yy'$

b) Multipliserer først med 2: $2yy' + 2y^2 = 2x$

Skifter ut $2yy'$ med u' og y^2 med u og får: $u' + 2u = 2x$

c) Integrerende faktor: $e^{\int 2dx} = e^{2x}$

$u'e^{2x} + u2e^{2x} = 2xe^{2x} \Leftrightarrow (ue^{2x})' = 2xe^{2x} \Leftrightarrow ue^{2x} = 2\int xe^{2x}dx$

Delvis integrasjon gir: $\int xe^{2x}dx = x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = x\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + D$

$ue^{2x} = 2(\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + D) = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C$

$u = x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}$

$y^2 = x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}}$