Fagdag torsdag 30.04.2015

Flere treningsoppgaver i CAS:

Oppgave 1

Bruk CAS til å bevise at gjennomsnittet av x-verdiene til nullpunktene er lik gjennomsnittet av x-verdiene til vendepunktene i en fjerdegradsfunksjon på formen $f(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

Oppgave 2

Vi har gitt vektorene $\vec{u} = [2, a, 0]$ og $\vec{v} = [3, c, 0]$.

Videre har vi gitt at $|\vec{u} \times \vec{v}| = 1$og $\vec{u} \cdot \vec{v} = 18$.

a) Bruk CAS til å finne a og c.

$\vec{w}$ er posisjonsvektoren til et punkt i et plan gitt av ligningen $z = 8$.

b) Bestem volumet til et tetraeder som er utspent av vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$.

Oppgave 3

Bruk CAS på denne oppgaven:

Tid: [år]	1996 (t=0)	2007 (t=11)
Bestand: [par]	5	43

Tabellen viser en telling av antall fødedyktige ulvepar i en bestand av ulver i det sentrale Idaho i 1996 ($t = 0$) og 2007 ($t = 11$).
I en modell for antall fødedyktge ulvepar y som funksjon av tiden t (målt i antall år etter 1996) gjelder følgende differensialligning:

$$y' = k(y-4)(90-y)$$

som er en variant av den logistiske differensialligningen, hvor vi i tillegg til å ha en øvre grense for bestanden, også har en minste grense som bestanden ikke må komme under hvis den ikke skal dø ut.

a) Vis at $y = \frac{90+4Ce^{-k86t}}{1+Ce^{-k86t}}$ er en generell løsning av differensialligningen. Finnes det en annen løsning? (Som ikke er dekket av alle mulige valg av C?)

b) Bestem k og C ut fra verdiene i tabellen.

c) Hva er den øvre grense for antallet fødedyktige ulvepar i det sentrale Idaho?

d) Bruk modellen til å regne ut på hvilket tidspunkt veksthastigheten er størst.

Hva er veksthastigheten på dette tidspunktet?

d) I hvilket år ville bestanden ha dødd ut hvis det var 3 fødedyktige ulvepar i 1996?

Oppgave 4

Vi skal bruke CAS til å gjøre de omstendelige beregningene som beviser koordinatformlene for skalarprodukt og vektorprodukt.
a)
Uten tap av generalitet lager vi to vektorer u og v fra Origo til $A = (x_A, y_A, z_A)$ og $B = (x_B, y_B, z_B)$.

Definer vi $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ og $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, kan vi med hjelp av cosinus-setningen skrive:
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a\,b\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$
der a, b og c er lengdene av henholdsvis $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ og $\overrightarrow{BC}$.
Bruk CAS til å regne ut $\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$ uttrykt ved koordinatene til A og B, og vis at dette gir koordinatformelen for skalarproduktet.

b)
Vektorproduktet $\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b}$ er definert av at w skal stå normalt på $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
I tillegg skal lengden være lik $|\vec{u}| = ab\sin\alpha$.
Definer $\vec{u}$ som $[x, y, z]$, og bruk betingelsene over til å vise koordinatformelen for vektorproduktet.
Hvorfor får vi to løsninger her?

Oppgave 5

a) Bruk definisjonene av vektor- og skalarprodukt til å bevise at:
$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$.

b) Gitt punktene $O = (0, 0, 0)$, $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ og $C = (0, 0, c)$.
Bruk CAS til å bevise denne sammenhengen mellom arealene:
$A^2_{OAB} + A^2_{OAC} + A^2_{OBC} = A^2_{ABC}$
(Tips: Bruk arealformelen som følger av oppgave a: $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$.)

c) Bruk CAS til å vise at normalvektoren til planet α gjennom A, B og C blir
$\vec{n} = [bc, ac, ab]$

d) Bruk CAS til å vise at ligningen til α kan skrives $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

e) Bruk CAS til å finne avstanden fra α til Origo.