R2 - Kapittel 3 - Trigonometri

16.12.10
Løsningsskisser

I (L)

Gjør om til absolutt vinkelmål (radianer):

a) 25° b) -135°

a) $25^\circ = \frac{2\pi 25^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi 25^\circ}{180^\circ} = \frac{5\pi}{36} \approx 0.436$ [rad]

b) $-135^\circ = -\frac{\pi 135^\circ}{180^\circ} = -\frac{3\pi}{4} \approx -2.36$ [rad]

Gjør om til grader:

c) $\frac{\pi}{5}$ d) $\frac{11\pi}{12}$

c) $\frac{\pi}{5} = \frac{180^\circ \pi}{\pi \cdot 5} = 36^\circ$

d) $\frac{11\pi}{12} = \frac{180^\circ \cdot 11\pi}{\pi \cdot 12} = 15^\circ \cdot 11 = 165^\circ$

II (M)

Løs ligningene:

a) $\cos x = -\frac{1}{2}, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$
b) $2\sin x = \sqrt{2}, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$
c) $\tan x = -1, \quad x \in [-\pi, \pi\rangle$

a) $\cos x = -\frac{1}{2}, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$

$x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee x = 2\pi - \frac{2\pi}{3} + l2\pi$

$L = \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$

b) $2\sin x = \sqrt{2}, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{4} + l2\pi$

$L = \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$

c) $\tan x = -1, \quad x \in [-\pi, \pi\rangle$

$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$L = \{-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$ (Obs: Felle, annet definisjonsområde: $x \in [-\pi, \pi\rangle$!)

III (M)

Vinkelen u ligger i andre kvadrant og $\cos u = -\frac{5}{13}$.
Regn ut ***eksakte*** verdier for:
a) $\sin u$ b) $\tan u$ c) $\sin 2u$ d) $\tan 2u$

a)

$\sin u = \pm\sqrt{1 - \cos^2 u} = \pm\sqrt{1 - (-\frac{5}{13})^2} = \pm\frac{12}{13}$ (2Kv: Negativ forkastes.)

$\sin u = \frac{12}{13}$

b)
$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$ (Som stemmer, tan negativ i 2Kv.)

c)
$\sin 2u = 2\sin u \cos u = 2 \cdot \frac{12}{13} \cdot (-\frac{5}{13}) = -\frac{120}{169} \approx -0.710$

d)
$\tan 2u = \frac{2\tan u}{1-\tan^2 u} = \frac{2\cdot(-\frac{12}{5})}{1-(-\frac{12}{5})^2} = \frac{120}{119} \approx 1.01$

Hvis man ikke husker denne formelen kan man bruke:

$\tan 2u = \frac{\sin 2u}{\cos 2u} = \frac{\sin 2u}{\pm\sqrt{1-\sin^2 2u}} = \frac{-\frac{120}{169}}{\pm\sqrt{1-(-\frac{120}{169})^2}} = \pm\frac{120}{119}$ (3Kv: Negativt alternativ forkastes)

$\tan 2u = \frac{120}{119}$

IV (M/H)

Løs ligningene:

a) $2\cos x \tan x - \cos x = 0, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$
b) $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$
c) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$
d) $3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 3\cos^2 x - 1 = 0, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$
(Tips: Erstatt 1 med $\sin^2 x + \cos^2 x$!)

a) $2\cos x \tan x - \cos x = 0, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$
$2\cos x(\tan x - \frac{1}{2}) = 0$ (Felles faktor! Ikke gjør det vanskeligere enn det er!)
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = 0.464 + l\pi$

$L = \{0.464, \frac{\pi}{2}, 3.61, \frac{3\pi}{2}\} \approx \{0.464, 1.57, 3.61, 4.71\}$

b) $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$
$u^2 - 3u + 2 = 0, \quad u = \sin x$
$u = 1 \vee u = 2$ (Umulig)
$\sin x = 1$

$L = \{\frac{\pi}{2}\}$

c) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$
$\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}\sin(2x + \varphi) = \sqrt{2}, \quad \tan\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi \in$ Kvadrant 1
$2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{2}$
$\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee 2x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + l2\pi$
$x = \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}}{2} + l\pi$
$x = \frac{\pi}{24} + k\pi \vee x = \frac{7}{24}\pi + l\pi$

$L = \{\frac{\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{31\pi}{24}\} \approx \{0.131, 0.916, 3.27, 4.06\}$

d) $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x - 1 = 0, \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$
$3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$
$2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

Forutsetter $\cos x \neq 0$ og dividerer med $\cos^2 x$
($\cos x = 0$ er ikke løsning, så dette gir ingen problemer.)

$2\tan^2 x - 5\tan x + 2 = 0$
$2u^2 - 5u + 2 = 0, \qquad u = \tan x$
$u = \frac{1}{2} \vee u = 2$
$\tan x = \frac{1}{2} \vee \tan x = 2$
$x = 0.464 + k\pi \vee x = 1.11 + l\pi$

$L = \{0.464, 1.11, 3.61, 4.25\}$

(Hvis man er oppmerksom ser man i $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$
kan $2\sin^2 x + 2\cos^2 x$ omformes til $2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \cdot 1 = 2$
slik at vi får ligningen:
$2 - 5\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{5}{2}2\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{5}{2}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow$
$\sin 2x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow$
$2x = 0.927 + k2\pi \vee 2x = \pi - 0.927 + l2\pi \Leftrightarrow$
$x = 0.464 + k\pi \vee x = 1.11 + l\pi$

$L = \{0.464, 1.11, 3.61, 4.25\}$

V (M/H)

En butikk er oppe fra 08:00 til 20:00 og har følgende statistikk over lengre tid:

Tid: t [timer] (etter 08:00)	0	2	4	6	7	8	9	10	12
Kunder: $k(t)$ [antall]	4	13.9	22.4	28	29.5	30	29.5	28	22.4

a) Finn ***ved regning*** en funksjon på formen $A\sin(kt + \varphi) + L$ som passer med verdiene i tabellen.
b) Bruk lommeregner og kurvetilpasning til å finne $A\sin(kt + \varphi)$
c) Regn ut når det er 24 kunder i butikken?

a)
Viktig å grafe punktene i tabellen, for å se hva som skjer.
Her har vi ikke en hel periode, så ikke så lett å se hva minimum og likevektslinjen er.
Mulige antagelser:
-Periode 24 timer, da dette gjentar seg dagen etter
-Bruke øyemål og legge inn en likevektslinje som skjer fornuftig ut

Jeg bruker øyemål og legger likevektslinjen på $L = 4$.
Da blir også faseforskyvningen lik $\phi = 0$:-)
Da har vi Amplitude: $\quad A = 30 - 4 = 26$
Da kurven er symmetrisk om $x = 8$ har vi en halv periode fra
$x = 0$ til $x = 16$: $\quad P = 16 \Rightarrow k = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{16 \cdot 2} = \frac{\pi}{16} \approx 0.196$

Dette gir modellen: $\quad k(x) = 26\sin(0.196x) + 4$

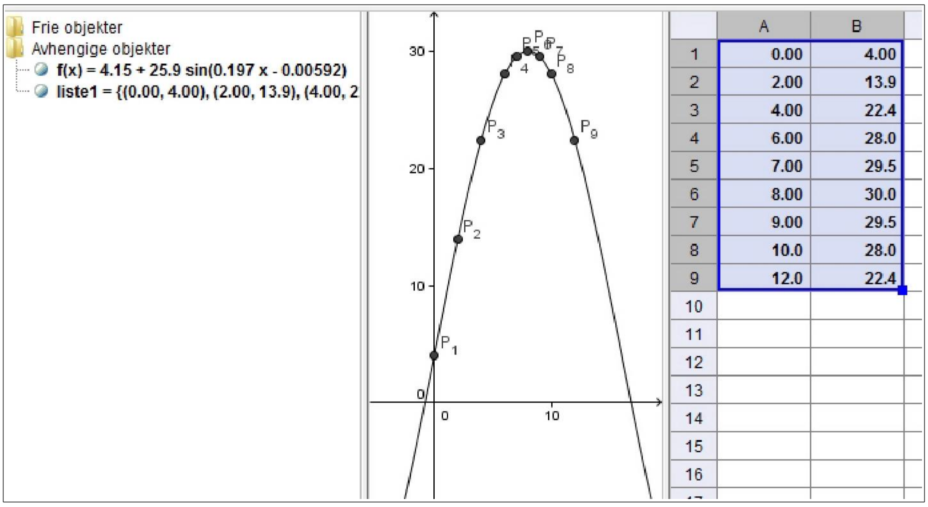
(Velger man periode $P = 24$ får man isteden $k(x) = 16\sin(0.262x - 0.524) + 14$ som er helt ok, da tabellen ikke gir nok informasjon til å få dette helt nøyaktig. Oppgaven var kanskje litt vel "åpen"...)

b)
LR:

Liste{0,2,4,6,7,8,9,10,12} i L1
Liste {4,13.9,..,22.4} i L2
STAT, CALC, SinReg L1,L2,Y1 gir da modellen:

$$k_{LR}(x) = 25.9\sin(0.197x - 0.00593) + 4.15$$

GeoGebra gir samme modell som lommeregner:



c)
Tidspunkt for 24 kunder i butikken:

$$k_{LR}(x) = 24 \Leftrightarrow 25.9\sin(0.197x - 0.00593) + 4.15 = 24$$

$$\sin(0.197x - 0.00593) = \frac{24-4.15}{25.9} = 0.76641$$
$$0.197x - 0.00593 = 0.873 + k2\pi \vee 0.197x - 0.00593 = \pi - 0.873 + l2\pi$$
$$x = \frac{0.873+0.00593}{0.197} + k\frac{2\pi}{0.197} \vee x = \frac{\pi-0.873+0.00593}{0.197} + l\frac{2\pi}{0.197} = 31.894l + 11.546$$
$$x = 4.46 + k31.9 \vee x = 11.5 + l31.9$$

): Ca. klokken 12:30 og klokken 19:30

Kan spare litt tid og bruke lommeregner med Y2=24 og CALC, intersect til å finne skjæring mellom Y1 (modellen) og Y2=24.