R2 - K4: Funksjoner

28.01.11
Løsningsskisser

I

Deriver de trigonometriske funksjonene:

a) $f(x) = \sin x + \cos x + \tan x$ b) $f(x) = \cos^2 x$

c) $f(x) = \sin x \tan x$ d) $f(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}$

a) $f'(x) = \cos x - \sin x + \frac{1}{\cos^2}$ (eller $\cos x - \sin x + 1 + \tan^2 x$)

b) Kjerneregel: $f(x) = u^2, \quad u = \cos x$

$f'(x) = 2u(-\sin x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$

(Går også med produktregel på $\cos x \cdot \cos x$...)

c) Produktregel: $f'(x) = \cos x \tan x + \sin x \frac{1}{\cos^2 x} = \cos x \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} =$
$\sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

(Faktorisert: $\frac{\sin x \cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x(\cos^2 x + 1)}{\cos^2 x}$)

d) Brøkregel: $f'(x) = \frac{-\sin x(2 - \sin x) - \cos x(-\cos x)}{(2 - \sin x)^2} = \frac{-2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(2 - \sin x)^2} = \frac{1 - 2\sin x}{(2 - \sin x)^2}$

II

Gitt funksjonen $f(x) = 1 - \sin 2x + \cos 2x$.
a) Gjør om til formen $L + A\sin(k(x - \phi))$.
b) Løs ligningen $\cos 2x - \sin 2x = -1, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$

a) $f(x) = 1 + \sqrt{(-1)^2 + 1^2}\,\sin(2x + \varphi), \quad \tan\varphi = \frac{1}{-1}, \quad \varphi$ i 2 kvadrant

$f(x) = 1 + \sqrt{2}\,\sin(2x + \frac{3\pi}{4}) = 1 + \sqrt{2}\,\sin(2(x + \frac{3\pi}{8})) \approx 1 + 1.41\sin(2(x + 1.18)$

b) $-\sin 2x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\,\sin(2(x + \frac{3\pi}{8})) = -1 \Leftrightarrow \sin(2(x + \frac{3\pi}{8})) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$2(x + \frac{3\pi}{8}) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \vee 2(x + \frac{3\pi}{8}) = \pi - (-\frac{\pi}{4}) + l2\pi \Leftrightarrow$

$x = -\frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{8} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{8} - \frac{3\pi}{8} + l\pi \Leftrightarrow$

$x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + l\pi \Leftrightarrow$

$L = \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\} \approx \{0.785, 1.57, 3.93, 4.71\}$

III

Gitt funksjonen $f(x) = \sin(x^2) - 0.5, \quad D_f = [-\pi, \pi]$
a) Finn eventuelle nullpunkter.
b) Finn eventuelle ekstremalpunkter.

a) Nullpunkter:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x^2 - 0.5 = 0 \Leftrightarrow \sin u = 0.5, u = x^2 \Leftrightarrow$

$u = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee u = \pi - \frac{\pi}{6} + l2\pi \Leftrightarrow$

$x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{6} + k2\pi} \vee x = \pm\sqrt{\frac{5\pi}{6} + l2\pi} \Leftrightarrow$

$L = \{-\sqrt{\frac{17\pi}{6}}, -\sqrt{\frac{13\pi}{6}}, -\sqrt{\frac{5\pi}{6}}, -\sqrt{\frac{\pi}{6}}, \sqrt{\frac{\pi}{6}}, \sqrt{\frac{5\pi}{6}}, \sqrt{\frac{13\pi}{6}}, \sqrt{\frac{17\pi}{6}}\}$

$\approx \{-2.98, -2.61, -1.62, -0.724, 0.724, 1.62, 2.61, 2.98\}$

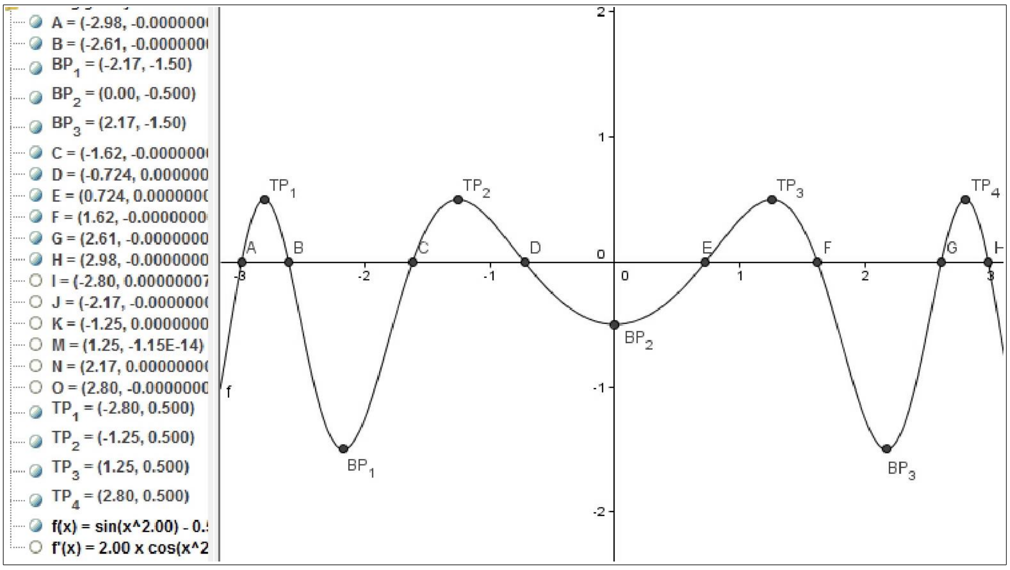
):
$(-2.98, 0), (-2.61, 0), (-1.62, 0), (-0.724, 0), (0.724, 0), (1.62, 0), (2.61, 0), (2.98, 0)$

b) Ekstremalpunkter, $f'(x) = 0$:
Kjerneregel: $f(x) = \sin u, \quad u = x^2$
$f'(x) = \cos u \cdot 2x = 2x \cos x^2$

$2x\cos x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \cos x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow$
$x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \Leftrightarrow$
$L = \{-\sqrt{\frac{5\pi}{2}}, -\sqrt{\frac{3\pi}{2}}, -\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \sqrt{\frac{5\pi}{2}}\}$
$\approx \{-2.80, -2.17, -1.25, 1.25, 2.17, 2.80\}$

): Topp-punkter: $(-2.80, 0.5), (-1.25, 0.5), (1,25, 0.5, 0.5), (2.80, 0.5)$
Bunn-punkter:
$(-\pi, -0.930), (-2.17, -1.50), (0, -0.5), (2.17, -1.5), (\pi, -0.930)$

Går også direkte:
$f(x) = \sin(x^2) - 0.5$ er maksimal når $\sin(x^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
$f(x) = \sin(x^2) - 0.5$ er minimal når $\sin(x^2) = -1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$



IV

Gitt funksjonen $f(x) = x^2 \ln x, \quad D_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$ (Feil parentes i original, men det skjønte dere...)
Finn nullpunkter, ekstremalpunkter og vendepunkter.

Nullpunkter:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Forkastes) $\vee \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$

): $(1, 0)$

Ekstremalpunkter: $f'(x) = 0$

Produktregel: $f'(x) = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} = 2x\ln x + x = 2x(\ln x + \frac{1}{2})$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (Forkastes)} \vee \ln x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0.607$

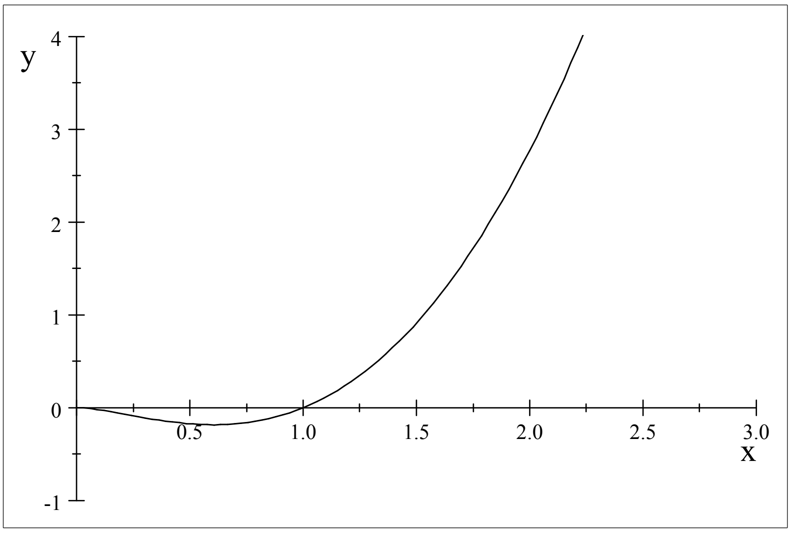
Bunnpunkt: $(\frac{1}{\sqrt{e}}, f(\frac{1}{\sqrt{e}})) = (\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}) \approx (0.607, -0.184)$

Vendepunkter: $f''(x) = 0$

Produktregel: $f''(x) = 2\ln x + 2x\frac{1}{x} + 1 = 2\ln x + 2 + 1 = 2\ln x + 3$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$

Vendepunkt: $(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, f(\frac{1}{\sqrt{e^3}})) = (\frac{1}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3}{2e^3}) \approx (0.223, -0.0747)$



V

En idrettsutøver teller pulsen etter en krevende øvelse og får dette resultatet:

Tid: t [min]	0	1	2
Pulsslag: $f(t)$ [antall]	198	120	85

Treneren til idrettsutøveren har stor tro på digitale hjelpemidler og har fått et program til å lage tre kurvetilpasninger han har tenkt å bruke som modell for pulsutviklingen de første 10 minuttene etter en øvelse:

1) $f(t) = 21.5t^2 - 99.5t + 198$ 2) $g(t) = 193e^{-0.423t}$ 3) $h(t) = 152e^{-0.662t} + 44$

Treneren er spesielt fornøyd med andregradsfunksjonen da den gir helt riktige verdier for de tre målte tidspunktene.

Hvilke refleksjoner gjør du deg?

Hvilken funksjon ville du brukt og hvorfor?

(Det er ikke meningen du skal regne eller gjøre kurvetilpasninger her, bare bruke hodet og gi en fornuftig vurdering.)

1) Generelt må det vel sies at det er for få målepunkter til å gi noe særlig godt grunnlag for en god modell...

2) (Andregradsfunksjonen) passer med de tre målepunktene, men vil stige igjen innenfor definisjonsområdet [0,10],

hvilket er helt unaturlig.

3) er en eksponentialfunksjon som avtar mot 0, hvilket heller ikke er så naturlig, med mindre treneren synes det
er greit at utøveren tar seg så hardt ut at han dør...

4) flater pent ut langs en horisontal asymptote på 44, som er naturlig å tolke som hvilepuls.

Konklusjon: 3) er den eneste som oppfører seg rimelig i forhold til den virkeligheten den skal modellere.