R2 - K 5 Integraler

Løsningsskisser

I

Finn integralene:

a) $\int x^2 + \frac{4}{x^2}\,dx$ b) $\int xe^x dx$ c) $\int xe^{x^2} dx$

d) $\int \sin x \cos x\, dx$ e) $\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx$

a) $\int (x^2 + 4x^{-2})dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + 4\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^3}{3} - \frac{4}{x} + C$

b) Delvis, $v = x$: $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$

c) Variabelskifte: $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$
$\int xe^{2x}dx = \int xe^u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

d) Variabelskifte: $u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$$\int \sin x \cos x\, dx = \int u \cos x \frac{du}{\cos x} = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

Eller delvis med $v = \sin x$:

$$\int \sin x \cos x dx = \sin x \sin x - \int \cos x \sin x dx$$

$$2\int \sin x \cos x dx = \sin x \sin x + C_1 \Leftrightarrow \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

Eller med trigonometrisk omforming:

$$\frac{1}{2}\int 2\sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x)dx = \frac{1}{2}\frac{-\cos(2x)}{2} + C = C - \frac{1}{4}\cos(2x)$$

(Som kan omformes til : $C - \frac{1}{4}(1 - 2\sin^2 x) = C - \frac{1}{4} + \frac{2}{4}\sin^2 x = \frac{1}{2}\sin^2 x + C_1$)

e) ***Viktig**: **Brøkdekomponering virker ikke his ikke graden i teller er lavere enn i nevner**!*

Derfor; ***først*** polynomdivisjon: $x^2 + 1 : (x^2 - x) = 1 + \frac{x+1}{x^2-x}$

Så brøkdekomponering: $\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x}$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-x}dx = \int (1 + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x})dx = x + 2\ln|x-1| - \ln|x| + C =$$
$$x + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} + C$$

II

Gitt funksjonen $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

a) Vis at $f'(x) = \sqrt{x^2-1}$

b) Finn ved regning det bestemte integralet $\int_1^3 \sqrt{x^2-1}\,dx$.

a) Kjerneregel: $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{u}, u = x^2-1$

$$(\sqrt{x^2-1})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

og:

$$\ln(x+\sqrt{x^2-1}) = \ln u, u = x+\sqrt{x^2-1}$$
$$\ln(x+\sqrt{x^2-1})' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$$

slik at:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{x}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}) =$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{x}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2}\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} =$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{x}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2-1+x^2-1}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{2(x^2-1)}{2\sqrt{x^2-1}}$$
$$\frac{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}{x^2-1} = \sqrt{x^2-1}$$

b) Kan gjøres selv om man ikke fikk til a)!

$$\int_1^3 \sqrt{x^2-1}\,dx = {}_1^3[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})] =$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{3^2-1} - \frac{1}{2}\ln(3+\sqrt{3^2-1}) - (\frac{1}{2}\sqrt{1^2-1} - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{1^2-1})) =$$
$$3\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\left(2\sqrt{2}+3\right) \approx 3.36$$

III

Finn det bestemte integralet $\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx$.
Tips: $u = 2-x$ er et mulig variabelskifte. Husk også at $x = 2-u$!

$$\frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

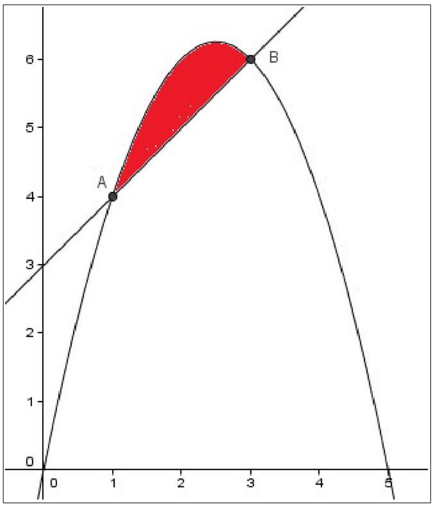
$\int x\sqrt{2-x}\,dx = -\int x\sqrt{u}\,du =$ (Ble ikke kvitt x så vi setter inn $x = 2-u$!)

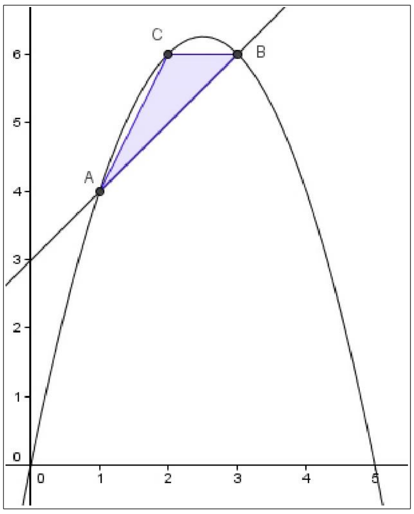
$$-\int(2-u)\sqrt{u}\,du =$$
$$\int(u\sqrt{u} - 2\sqrt{u})du = \int(u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}})du =$$
$$\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx = {}_1^2[\frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}] =$$
$$\frac{2}{5}(2-2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(2-2)^{\frac{3}{2}} - (\frac{2}{5}(2-1)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(2-1)^{\frac{3}{2}}) =$$
$$0 - (\frac{2}{5} - \frac{4}{3}) = \frac{14}{15}$$

IV2

Arkimedes viste at arealet A av et såkalt parabelsegment, farvet rødt i figur 1, var $\frac{4}{3}$ av arealet til en trekant, farvet blå i figur 2, med samme korde som grunnlinje, og punktet C midt mellom A og B.





Figur 1. Figur 2.

Bruk integralregning til å vise at dette stemmer, når vi bruker parabelen $f(x) = x(5-x)$ og punktene A, B og C har x-koordinatene $1, 3$ og 2.

Areal trekant: $A_{ABC} = \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{(3-2)(6-4)}{2} = 1$

Areal trapes under korden: $A_T = \frac{2(4+6)}{2} = 10$ (***Bør tegnes i egen figur!***)

Areal under parabel: $I = \int_1^3 (5x - x^2)dx = {}_1^3\left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right] =$
$\frac{5 \cdot 3^2}{2} - \frac{3^3}{3} - \left(\frac{5 \cdot 1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{45}{2} - 9 - \frac{5}{2} + \frac{1}{3} =$
$\frac{40}{2} - 9 + \frac{1}{3} = 11 + \frac{1}{3} = \frac{34}{3}$

Areal parabelsegment: $A_{ps} = I - A_T = \frac{34}{3} - 10 = \frac{4}{3}$

): $A_{ps} = \frac{4}{3} A_{ABC}$

V

Funksjonen f er gitt av: $f(x) = x\sqrt{3-x}$, $D_f = [0, 3]$

Finn volumet av den omdreiningsgjenstanden vi får nå vi dreier grafen til $f(x)$ 360° om x-aksen.

$$V = \int_0^3 A(x)dx = \int_0^3 \pi f^2(x)dx = \pi \int_0^3 x^2(3-x)dx = \pi \int_0^3 3x^2 - x^3)dx =$$
$$\pi {}_0^3\left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right] = \pi\left(3^3 - \frac{3^4}{4} - (0-0)\right) = \pi\left(27 - \frac{81}{4}\right) = \pi \frac{108-81}{4} = \frac{27\pi}{4} \approx 21.2$$