R2 eksamen våren 2013. (21.05.2013)

Løsningsskisser

(Versjon 21.05.13)

Del 1 - Uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) $f'(x) = 3(-\sin x) = -3\sin x$

b) Kjerneregel ($u = \pi x$): $g'(x) = 6\cos(\pi x)\pi = 6\pi\cos(\pi x)$

c) Produktregel: $h'(x) = 3e^{2x}2 \cdot \sin(3x) + 3e^{2x}\cos(3x)3 =$
$3e^{2x}(2\sin 3x + 3\cos 3x)$

Oppgave 2

a) Variabelskiftet $u = x^2 - 4$ gir $\quad u' = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$\int \frac{2x}{x^2-4}dx = \int \frac{2x}{u}\frac{du}{2x} = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|x^2 - 4| + C$

b) Delbrøkoppspaltning:

$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx-2B}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A-2B)}{(x-2)(x+2)}$ gir:

$I \qquad A + B = 2$

$II \qquad A - B = 0$

med løsning: $A = B = 1$

$\int \frac{2x}{x^2-4}dx = \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{1}{x+2}dx = \ln|x-2| + \ln|x+2| + C =$
$\ln|(x-2)(x+2)| + C = \ln|x^2 - 4| + C$

(Som selvfølgelig er samme svar som i a) regnet ut på en mer tungvindt måte...)

Oppgave 3

$\overrightarrow{AB} = [2, 2, 1], \qquad \overrightarrow{AC} = [-1, 1, 0]$

a) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [-1, -1, 4]$

$$A_{ABC} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{|[-1,-1,4]|}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = [2,2,0] \cdot [-1,1,0] = 0 \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ$

$$A_{ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \text{ (som i a)...)}$$

Oppgave 4

Separerer:
$y \neq 0$:

$$\frac{y'}{y} = 6x \Leftrightarrow \int \frac{y'}{y} dx = 6\int x dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = 6\int x dx \Leftrightarrow$$
$$\ln|y| = 3x^2 + C_1 \Leftrightarrow |y| = C_2 e^{3x^2} \Leftrightarrow$$
$$y = Ce^{3x^2} \qquad \text{(Generell løsning)}$$

($y = 0$: Også løsning, men inkludert i den første med $C = 0$.)

$y(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = Ce^0 \Leftrightarrow C = 2$

): $y = 2e^{3x^2}$ (Spesiell løsning)

Oppgave 5

a) Her burde vel b) ha kommet før a)? Eller hvordan har de tenkt å finne
a_{16} og S_{16} uten å vite at dette er en aritmetisk følge/rekke?
Noen husker også at summen av ulike tall er kvadrattall, men det
blir også vist i b)...

Aritmetisk med $a_1 = 1$ og differanse $d = 2$:

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$$

$$a_{16} = 2 \cdot 16 - 1 = 31$$

$$S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2} = (1 + 2n - 1)\frac{n}{2} = 2n\frac{n}{2} = n^2 \text{ (Kvadrattall...)}$$

): $S_{16} = 16^2 = 256$

b) Allerede gjort i a)

c) $S_n > 400 \Leftrightarrow n^2 > 400 \Leftrightarrow n^2 - 20^2 > 0 \Leftrightarrow (n-20)(n+20) > 0$
Tallinjer gir: $n > 20$ eller $n < -20$ (forkastes, da $n > 0$)

): Vi må ha minst $n = 21$ ledd.

Oppgave 6

Tegn en skisse, pass på at $f(x)$ aldri skjærer x-aksen og alltid ligger over x-aksen, og har vendepunkt for $x = 1$ og $x = 3$, og bunnpunkt for $x = -2$, og toppunkt for $x = 2$. Når $x \to -\infty$ vokser $f(x)$ og når $x \to \infty$ kan $f(x)$ gå asymptotisk mot x –aksen. (Går an å lage noen finurlige varianter av dette eksemplet, men de ber om bare en skisse på hvordan det *kan* se ut.)

Oppgave 7

$n = 1$:

$VS = a$

$HS = a\frac{k^1-1}{k-1} = a \qquad VS = HS \qquad OK!$

$n \to n+1$:

Antar $S(n) = a\frac{k^n-1}{k-1}$, må vise at $S(n+1) = a\frac{k^{n+1}-1}{k-1}$

$$VS = S(n+1) = S(n) + a_{n+1} = a\frac{k^n-1}{k-1} + ak^{(n+1)-1} =$$
$$a\frac{k^n-1}{k-1} + ak^n = \frac{a}{k-1}(k^n - 1 + k^n(k-1)) =$$
$$\frac{a}{k-1}(k^n - 1 + k^{n+1} - k^n) = \frac{a}{k-1}(k^n - 1) = a\frac{k^n-1}{k-1} \qquad QED$$

(Har altså vist summeformelen for geometrisk rekke vha. induksjonsbeviset.)

Del 2 - Med hjelpemidler

Oppgave 1

a) Endring = Tilførsel - Utskilling

$$y' = 8 - y\frac{5}{100}$$

): $y' = 8 - 0.05y$ [mL], $t \in [0, \infty\rangle$ [timer]

b)

Lineær: $y' + 0.05y = 8$

Men også separabel, så:

$y \neq \frac{8}{0.05} = 160$:

$$\int \frac{y'}{8-0.05y}dt = \int dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{8-0.05y}dy = \int dt \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{-0.05}\ln|8 - 0.05y| = t + C_1 \Leftrightarrow \ln|8 - 0.05y| = -0.05t + C_2 \Leftrightarrow$$
$$8 - 0.05y = C_3e^{-0.05t} \Leftrightarrow y = \frac{8}{0.05} + \frac{C_3}{0.05}e^{-0.05t} \Leftrightarrow$$
$$y = 160 + Ce^{-0.05t} \qquad \text{(Generell løsning)}$$

($y = 160$ er også løsning, men er dekket av den første løsningen når $C = 0$.)

$y(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = 160 + Ce^0 \Leftrightarrow C = -160$

): Spesiell løsning: $y = 160 - 160e^{-0.05t}$ QED

c) $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} 160 - 160e^{-0.05t} = 160,$

da $e^{-0.05t} \to 0$ når $t \to \infty$.

Dette betyr at pasienten i det lange løp vil få stabilisert mengden medisin i kroppen på 160mL.

(Stabiliseringen skjer fordi $y' \to 0$ når y nærmer seg 160:

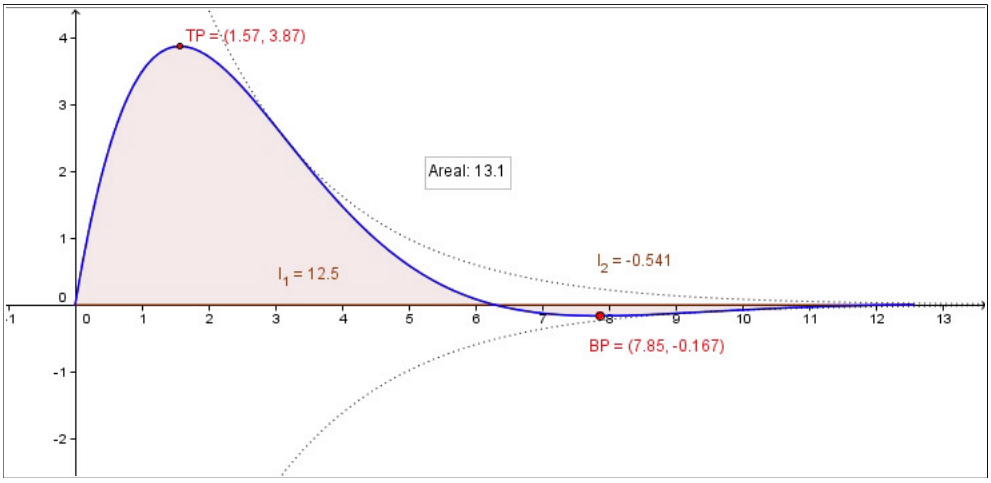
$y' = 0 \Rightarrow 8 - 0.05y = 0 \Rightarrow y = \frac{8}{0.05} = 160$

y vokser først, men flater så ut og nærmer seg 160 mL asymptotisk.)

Oppgave 2

$f(x) = 12e^{0.5x}\sin(0.5x), \qquad x \in [0, 4\pi]$

a) GeoGebra:



Kommandoer:

f(x)=Funksjon[12 exp(-0.5 x) sin(0.5 x),0,4 pi]
o(x)=12 exp(-0.5 x)
u(x)=-o(x)

TP=Ekstremalpunkt[f,1,3]
BP=Ekstremalpunkt[f,7,10]

I_1 = Integral[f,0,2 pi]
I_2 = Integral[f,2 pi, 4 pi]

b) Se kommandoene over, får:

Topp-punkt $\quad (1.57, 3.87)$ og $(4\pi, 0)$ (Endepunkt)

Bunn-punkt $\quad (7,85, -0.167)$ og $(0, 0)$ (Endepunkt)

Kan regne, men blir litt mer arbeid:
Produktregel:

$$f'(x) = 12e^{-0.5x}(-0.5)\sin(0.5x) + 12e^{-0.5x}\cos(0.5x)0.5 =$$
$$6e^{-0.5x}(-\sin(0.5x) + \cos(0.5x))$$

$$f'(x) = 0 : \qquad -\sin(0.5x) + \cos(0.5x) = 0$$
$$\cos(0.5x) \neq 0 :$$
$$\tan(0.5x) = 1 \iff$$
$$0.5x = \frac{\pi}{4} + k\pi \iff$$
$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

):

$$TP = \left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 12e^{-\frac{0.5\pi}{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 6\sqrt{3}\,e^{-0.25\pi}\right)$$
$$\approx (1.57, 3.87)$$

$$BP = \left(\frac{5\pi}{2}, f\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{5\pi}{2}, 6\sqrt{2}\,e^{-1.25\pi}\right)$$

$\approx (7,85,0.167)$

c) $A = I_1 + |I_2| = \int_0^{2\pi} f(x)dx + \left|\int_{2\pi}^{4\pi} f(x)dx\right|$

Greiest med GeoGebra:
I_1 = Integral[f,0,2 pi]
I_2 = Integral[f,2 pi, 4 pi]
som gir oss:
$A = 12.5 + |-0.541| \approx 13.0$

Mer arbeid med regning:
Delvis integrasjon i to runder:
$\int e^{-0.5x}\sin(0.5x)dx =$
$-2e^{-0.5x}\sin(0.5x) - \int -e^{-0.5x}\cos(0.5x)dx =$
$-2e^{-0.5x}\sin(0.5x) + \int e^{-0.5x}\cos(0.5x)dx =$
$-2e^{-0.5x}\sin(0.5x) + (-2e^{-0.5x}\cos(0.5x) - \int e^{-0.5x}\sin(0.5x)dx)) =$

Med $I = \int e^{-0.5x}\sin(0.5x)dx$ som ukjent har vi ligningen:
$I = -2e^{-0.5x}\sin(0.5x) - 2e^{-0.5x}\cos(0.5x) - I \Leftrightarrow$
$2I = -2e^{-0.5x}\sin(0.5x) - 2e^{-0.5x}\cos(0.5x) \Leftrightarrow$
$I = -e^{-0.5x}(\sin(0.5x) + \cos(0.5x)$

$A = \int_0^{2\pi} f(x)dx + \left|\int_{2\pi}^{4\pi} f(x)dx\right| =$
$12\Big[\ -e^{-0.5x}(\sin(0.5x) + \cos(0.5x)\ \Big]_0^{2\pi} + \left|12\Big[\ -e^{-0.5x}(\sin(0.5x) + \cos(0.5x)\ \Big]_{2\pi}^{4\pi}\right| =$
$12(-e^{-\pi}(0-1) - (-e^0(0+1)) + 12|(-e^{-2\pi}(0+1) - (-e^{-\pi}(0-1))| =$
$12(e^{-\pi}+1) + 12|-e^{-2\pi} - e^{-\pi}| =$
$24e^{-\pi} + 12e^{-2\pi} + 12 \approx 13.1$

Oppgave 3

$\overrightarrow{AB} = [0,3,0], \qquad \overrightarrow{AD} = [-3,0,4]$

a) $A_{ABD} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|}{2} = \frac{\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z}\\ 0 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 4\end{matrix}\right\|}{2} = \frac{|[12,0,9]|}{2} = \frac{3|[4,0,3]|}{2} = \frac{15}{2}$

b) Plan α : Punkt A, normalvektor $\overrightarrow{n_\alpha} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}) = [4,0,3]$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_\alpha} = 0 \Leftrightarrow [x-3, y-0, z-0]\cdot[4,0,3] = 0 \Leftrightarrow 4x - 12 + 3z = 0 \Leftrightarrow$

$4x + 3z - 12 = 0 \qquad QED$

c) Avstand fra planet $ax + by + cz + d = 0$ til Origo er alltid:
$a = \left|\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| = \frac{|-12|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{12}{5}$

(Som er et spesialtilfelle av avstandsformelen:

$$a = \left|\frac{ax_O+by_O+cz_O+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| = \left|\frac{4\cdot0+0\cdot0+3\cdot0-12}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \frac{|-12|}{5} = \frac{12}{5}$$

eller den rene vektorformelen som projiserer $\overrightarrow{AO}$ ned på normalvektoren:

$$a = \frac{|\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{n_\alpha}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}|} = \frac{|[-3,0,0]\cdot[4,0,3]|}{5} = \frac{|-12|}{5} = \frac{12}{5}\ )$$

d) Normalvektor for planet β (planet BCD)

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = [0,12,9] = 3[0,4,3]$$

Velger $\overrightarrow{n_\beta} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}) = [0,4,3]$

Vinkelen mellom planene er lik vinkelen mellom normalvektorene:

$$\cos\phi = \frac{\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}}{|\overrightarrow{n_\alpha}||\overrightarrow{n_\beta}|} = \frac{[4,0,3]\cdot[0,4,3]}{5\cdot5} = \frac{9}{25} \Rightarrow$$

$\phi \approx 68.9^\circ$ (Da $\phi < 90^\circ$ trenger vi ikke justere vinkelen.)

Oppgave 4

a) Pythagoras: $AC = \sqrt{OC^2 - OA^2} = \sqrt{3^2-2^2} = \sqrt{5}$
(Radius i sirkel: $r = OB = OC = 3$)

): $C = (2, \sqrt{5})$ (Samme x –koordinat som A.)

l : $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$ (Linje gjennom Origo, trenger bare stigningstallet.)

b) Tungvindt å integrere, vi har direkte: $V = \frac{\pi AC^2 OA}{3} = \frac{\pi\cdot5\cdot2}{3} = \frac{10}{3}\pi$
Men vi må jo gjøre det de ber oss om, nå har vi ihvertfall en kontrollmulighet:

$$V = \pi\int_0^2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2dx = \frac{5\pi}{4}\int_0^2 x^2dx = \frac{5\pi}{4}\left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^2 = \frac{5\pi}{4}\,\frac{2^3}{3} = \frac{10}{3}\pi$$

c) $V = \pi\int_2^3 y^2dx = \pi\int_2^3(9-x^2)dx = \pi\left[\ 9x - \frac{x^3}{3}\ \right]_2^3 =$
$\pi(27 - \frac{27}{3} - (18 - \frac{8}{3})) = \frac{8}{3}\pi$

(Også her finnes en formel: $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r-h) = \frac{\pi 1^2}{3}(3\cdot3-1) = \frac{8}{3}\pi$
Denne formelen gir selvfølgelig $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ når $h = 2r$.)

Oppgave 5

a) Vi har: $x = D\cos v$ og $y = D\sin v$

Omkrets: $O(v) = 2x + 2y = 2D\cos v + 2D\sin v$

Areal: $A(x) = xy = D\cos vD\sin v =$
$D^2\sin v\cos v = \frac{D^2}{2}\sin 2v$

b)

$O'(x) = -2D\sin v + 2D\cos v = 2D(\cos v - \sin v)$

$O'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos v = \sin v$
Forutsetter vi $\cos v \neq 0$ og dividerer får vi: $\tan v = 1 \Leftrightarrow$
$x = 45^\circ + k180^\circ$

Oppgaven forutsetter $x \in \langle 0, 90^\circ \rangle$, så vi har $x = 45^\circ$ som løsning,
da er $x = y = \frac{D}{\sqrt{2}}$ og rektanglet er et kvadrat.

$O_{\text{max}} = O(45^\circ) = 2D\frac{\sqrt{2}}{2} + 2D\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\,D$

c)
$A'(v) = \frac{D^2}{2}\cos(2v)2 = D^2\cos 2v$

$A'(v) = 0 \Leftrightarrow \cos 2v = 0 \Leftrightarrow 2v = 90^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow$
$v = 45^\circ + k90^\circ$ (Forkaster alt utenom $k = 0$)

Også her får vi $x = y$ og et kvadrat.
$A_{\text{max}} = A(45^\circ) = \frac{D^2}{2}\sin(2 \cdot 45^\circ) = \frac{D^2}{2}$

(Eller $A_{\text{max}} = xy = \frac{D}{\sqrt{2}}\frac{D}{\sqrt{2}} = \frac{D^2}{2}$)

Oppgave 6

a) Geometrisk rekke med kvotient $k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{3}{4}$

Sum: $S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{\frac{A}{4}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{A}{4-3} = A$

Dette betyr at i det lange løp vil hele arealet A av den opprinnelige trekanten bli fjernet slik at det ikke blir noe areal igjen i Sierpinski-trekanten.

b) Oppgaven er uklart formulert, men vi skjønner jo at de mener den *samlede* omkretsen av de svarte trekantene i Sierpinski-trekanten.

Figur 2: Hver side halvparten men 3 ganger så mange:
$\frac{a}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 3\frac{3a}{2}$
Figur 3: Igjen halvering av hver side, men 3 ganger så mange:
$\frac{3\frac{3a}{2}}{2}3 = 3\frac{9a}{4}$
Og slik fortsetter det.

c) Leddene i b) er en geometrisk rekke med $o_n = 3a(\frac{3}{2})^n$
ut fra:
Figur 2: $o_1 = 3a\frac{3}{2} =$
Figur 3: $o_2 = \frac{9a}{2}\frac{3}{2} = o_1\frac{3}{2} = 3a(\frac{3}{2})^2$
Figur 4: $o_3 = \frac{27a}{4}\frac{3}{2} = o_2\frac{3}{2} = 3a(\frac{3}{2})^3$

Altså rekursivt: $o_{n+1} = o_n\frac{3}{2}$ og eksplisitt: $o_n = 3a(\frac{3}{2})^n$

$3a(\frac{3}{2})^n \to \infty$, når $n \to \infty$, da eksponentialfunksjonen $(\frac{3}{2})^n$ går mot uendelig når grunntallet er større enn 1.

Omkretsen til Sierpinski-trekanten går derfor mot uendelig.