# Matematikk - R2

# Løsningsskisser

## Oppgave 1

a)
1) Produktregel: $f'(x) = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$
2) Enten kjerneregel:

$\sin^2 x = u^2, u = \sin x \Rightarrow (\sin^2 x)' = 2u\cos x = 2\sin x\cos x = \sin 2x$
$\cos^2 u = u^2, u = \cos x \Rightarrow (\cos^2 x)' = 2u(-\sin x) = -2\cos x\sin x = -\sin 2x$

$g(x) = \sin 2x - (-\sin 2x) = 2\sin 2x$

eller: $g(x) = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x = -\cos u, u = 2x$
$g'(x) = -(-\sin u)2 = 2\sin 2x$

b)
1) Variabelskifte: $u = x^2 + 3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$
$\int \frac{x}{x^2+3}dx = \int \frac{x}{u}\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + C$

2) $\int_0^3 f(x)dx = \frac{2\cdot 2}{2} - \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$ (Areal trekanter, negativt under $x$-akse...)

c) Ulineær og separabel:

$y \neq 0$ gir: $\frac{1}{y^2}y' = 2 \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2}y'dx = \int 2dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2}dy = \int 2dx \Leftrightarrow \int y^{-2}dy = \int 2dx$
$\frac{y^{-2+1}}{-2+1} = 2x + C_1 \Leftrightarrow \frac{y^{-1}}{-1} = 2x + C_1 \Leftrightarrow \frac{1}{y} = -2x - C_1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{-2x-C_1} \Leftrightarrow y = \frac{1}{C-2x}$

Forutsetningen $y \neq 0$ må undersøkes, og vi ser at $y = 0$ også er en løsning.

Generelle løsninger: $y = 0 \vee y = \frac{1}{C-2x}$

Initialbetingelse: $\frac{1}{2} = \frac{1}{c-2\cdot 0} \Leftrightarrow C = 2$ ($y = 0$ kan ikke oppfylle initialbetingelse.)

): Spesiell løsning: $y = \frac{1}{2-x}$

d)
1) $\overrightarrow{AB} = [2,2,1] \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$
$\overrightarrow{AC} = [4,3,-3 \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2+3^2+3^2} = \sqrt{34}$

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\cdot 4 + 2\cdot 3 + 1\cdot(-3) = 11$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = [2(-3) - 3\cdot 1, -(2(-3) - 4\cdot 1, 2\cdot 3 - 4\cdot 2] = [-9, 10, -2]$$

3) $\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|^2 = (-9)(-9) + 10 \cdot 10 + (-2)(-2) = 185$

$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2 = 11^2 = 121$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 3^2 \sqrt{34}^2 = 9 \cdot 34 = 306$

$VS = 185 + 121 = 306$
$HS = 306$ $\qquad$ *QED*

(Har bevist en kjent setning som kan brukes til å regne ut lengden av et vektorprodukt eller et areal av et parallellogram utspent av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ direkte:

$\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ )

# Oppgave 2

a) $F_1 = \int_0^a x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{1}{3} a^3$

b) $F_2 + F_1 = af(a) = a \cdot a^2 = a^3 \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{a^3 - F_1}{F_1} = \frac{a^3 - \frac{1}{3}a^3}{\frac{1}{3}a^3} = \frac{\frac{2}{3}a^3}{\frac{1}{3}a^3} = 2$

c) Tilsvarende: $G_1 = \int_0^a x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^a = \frac{1}{n+1} a^{n+1}$

d) $G_2 + G_1 = af(a) = a \cdot a^n = a^{n+1} \Rightarrow$

$\frac{G_2}{G_1} = \frac{a^{n+1} - G_1}{G_1} = \frac{a^{n+1} - \frac{1}{n+1}a^{n+1}}{\frac{1}{n+1}a^{n+1}} = \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1-1}{1} = n$

# Oppgave 3

a) Differansen er konstant: $d = 2$

$S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2} = (1 + 2n - 1)\frac{n}{2} = n^2$ $\qquad$ (Summer av ulike tall er kvadrattall...)

b) Geometrisk rekke med kvotient: $k = \frac{1}{3}$

1) $S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = 1 \frac{(\frac{1}{3})^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{(\frac{1}{3})^n - 1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}(1 - (\frac{1}{3})^n)$

$S_n > 1.45 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(1 - (\frac{1}{3})^n) > 1.45 \Leftrightarrow 1 - (\frac{1}{3})^n > 0.9667 \Leftrightarrow$
$(\frac{1}{3})^n < 1 - 0.9667 \Leftrightarrow (\frac{1}{3})^n < 0.0333 \Leftrightarrow \ln(\frac{1}{3})^n < \ln 0.0333 \Leftrightarrow$
$n > \frac{\ln 0.0333}{\ln \frac{1}{3}} \Leftrightarrow n > 3.10$

): Må ha med minst 4 ledd

2) $|k| < 1$, så konvergent rekke: $\qquad S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

c)

1) Konvergent når $|k| < 1 \Leftrightarrow |\frac{x}{3}| < 1 \Leftrightarrow -3 < x < 3$

$S(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{3}{3-x}$

2) Husk på definisjonsområdet: $-3 < x < 3$

$S(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{3}{3-x} = 4 \Leftrightarrow 3 = 12 - 4x \Leftrightarrow x = \frac{12-3}{4} = \frac{9}{4}$

$S(x) = -2 \Leftrightarrow \frac{3}{3-x} = -2 \Leftrightarrow 3 = -6 + 2x \Leftrightarrow x = \frac{3-(-6)}{2} = \frac{9}{2}$ (Forkastes, utenfor definisjonsområdet)

Ingen løsning

d)

$n = 1$ : $S_1 = 1$ og formel gir $\frac{1(1+1)(1+2)}{6} = 1$ *OK*!

$n \to n+1$ :

Forutsetter at $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ og må ut fra dette vise at $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$.

Legg merke til at $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, så $a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Vi regner ut:

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$ *QED*

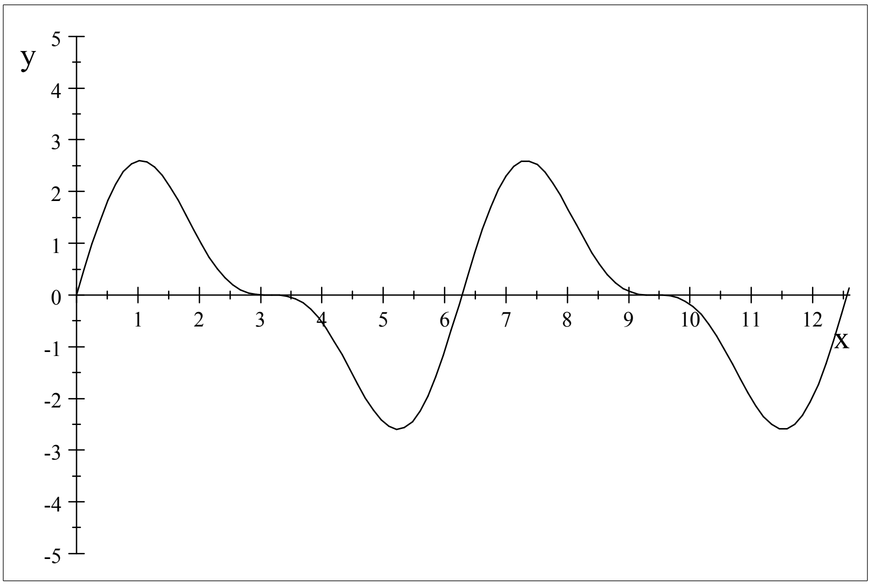
(Setter felles faktorer $(n+1)(n+2)$ utenfor parentes i teller, viktig ikke å multiplisere ut, da blir det mye vanskeligere regning...)

# Oppgave 4

## Alternativ 1

$f(x) = 2\sin x + 2\sin x\cos x, \quad x \in \langle 0, 4\pi\rangle$

a)




Vi ser at perioden er $T = 2\pi$, da grafen gjentar seg selv to ganger i $\langle 0, 4\pi\rangle$.

b) Nullpunkter: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0 + m\pi \vee x = \pi + n2\pi$

): $(\pi, 0), (2\pi, 0), (3\pi, 0)$

c) Produktregel på siste del av $f(x)$:

$f'(x) = 2\cos x + 2(\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)) = 2\cos x + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) =$
$2\cos x + 2(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$

Ekstremalpunkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4u^2 + 2u - 2 = 0, u = \cos x \Leftrightarrow 2u^2 + u - 1 = 0$
$u = -1 \vee u = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = -1 \vee \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$x = \pi + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + l2\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + m2\pi$

Topp-punkter: $(\frac{\pi}{3}, f(\frac{\pi}{3})) = (\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$
$(\frac{7\pi}{3}, f(\frac{7\pi}{3})) = (\frac{7\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$

Bunn-punkter: $(\frac{5\pi}{3}, f(\frac{5\pi}{3})) = (\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$
$(\frac{11\pi}{3}, f(\frac{11\pi}{3})) = (\frac{11\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$

(Sadel-punkter for $x = \pi$ og $3\pi$.)

d) Kjerneregel på første ledd:
$f''(x) = 4 \cdot 2\cos x(-\sin x) + 2(-\sin x) = -8\cos x \sin x - 2\sin x$

Vendepunkter: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -8\cos x \sin x - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow$
$4\cos x \sin x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 4\sin x(\cos x + \frac{1}{4}) = 0 \Leftrightarrow$
$x = 0 + k\pi \vee x = 1.82 + l2\pi \vee x = 4.46 + l2\pi$

Vendepunkter i $\langle 0, 2\pi \rangle$: $(1.82, f(1.82)) = (1.82, 1.46)$
$(\pi, 0)$
$(4.46, f(4.46) = (4.46, -1.46)$

e)
Ubestemt integral: $\int(2\sin x + 2\sin x \cos x)dx = \int(2\sin x + \sin 2x)dx =$
$-2\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$

$A = \int_0^\pi (2\sin x + 2\sin x \cos x)dx = [-2\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x]_0^\pi =$

$-2\cos \pi - \frac{1}{2}\cos 2\pi - (-2\cos 0 - \frac{1}{2}\cos 0) =$
$-2(-1) - \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 4$

# Oppgave 4

## Alternativ 2

$f(x) = \cos x$

a) Tangent $T$ med "ett-punkts-formelen":
$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow y - \cos a = -\sin a(x - a) \Leftrightarrow$
$y = -(\sin a)x + a\sin a + \cos a \qquad QED$

b) $B$ : Skjæring $y$ –akse: $x = 0 \Rightarrow y = -(\sin a)0 + a\sin a + \cos a = a\sin a + \cos a$

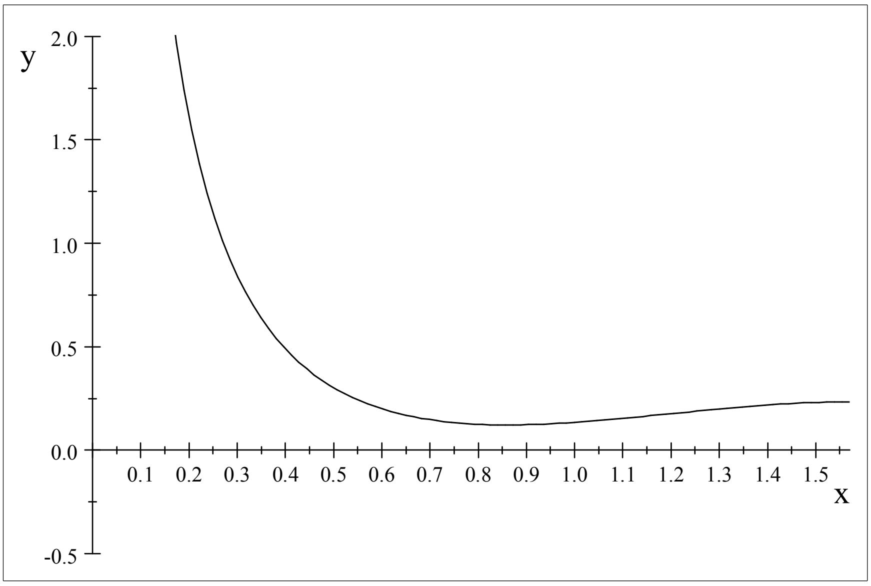
$A$ : Skjæring $x$ –akse: $y = 0 \Rightarrow 0 = -(\sin a)x + a\sin a + \cos a \Leftrightarrow$
$x = \frac{a\sin a+\cos a}{\sin a} = a + \frac{\cos a}{\sin a}$

$F_{\Delta OAB} = \frac{(a\sin a+\cos a)(a\sin a+\cos a)}{2} = \frac{1}{2}(a\sin a + \cos a)(a + \frac{\cos a}{\sin a})$ *QED*

c) Differanseareal:

$T(a) = F_{\Delta OAB} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = F_{\Delta OAB} - [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = F_{\Delta OAB} - 1$ *QED*

d) $T(a) = \frac{1}{2}(a\sin a + \cos a)(a + \frac{\cos a}{\sin a}) - 1$




e) Ment å bli løst med digitalt hjelpemiddel, ikke fristende å derivere $T(a)$, dessuten vil blanding av $a$ og $\sin a$ ikke gi eksakte løsninger uansett...

**Lommeregner**:
Y1=0.5*(X*sin(X)+cos(X))*(X+cos(X)/sin(X))-1
CALC, 3:minimum gir: $x \approx 0.860$

Når $x \to \frac{\pi}{2}$, vil tangenten $T$ få stigningstallet $-1$ og skjære $y$ –aksen i $(\frac{\pi}{2}, 0)$, det farvelagte området blir da ett istedenfor to områder og $P$ havner i skjæringspunktet mellom f(x) og $x$-aksen, $(\frac{\pi}{2}, 0)$,
så arealet blir da $\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}{2} - 1 = \frac{\pi^2}{8} - 1 \approx 0.234$

(Kan selvfølgelig også sette rett inn i $T(a)$ eller bruke Y1($\pi$/2) på lommeregner:

$T(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{2} + \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}) - 1 =$
$\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}\cdot 1 + 0)(\frac{\pi}{2} + \frac{0}{1}) - 1 = \frac{\pi^2}{8} - 1 \approx 0.234$ )

(Oppgaveforfatter har nok tenkt at man kunne bruke GeoGebra eller TI Inspire her, men egentlig er det litt bortkastet tid når man bare har 5 timer til rådighet...)

# Oppgave 5

a)
Endringen per år: $y'$
=innvandring-utvandring+fødte-døde= $0.014y - 0.005y + 60000 - 42000 = 0.009y + 18000$

): Differensialligning: $y' = 0.009y + 18000$

b) $y' = 72000 \Rightarrow 0.009y + 18000 = 72000 \Leftrightarrow y = \frac{72000-18000}{0.009} = 6000000$ [innbyggere]

c) Lineær ligning så den kan løses med integrerende faktor, men enklest som separabel:

$y' = 0.009(y + 2000000)$

$\int \frac{1}{y+2000000} y' dt = \int 0.009 dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{y+2000000} dy = \int 0.009 dt \Leftrightarrow$
$\ln|y + 2000000| = 0.009t + C_1 \Leftrightarrow y + 2000000 = e^{0.009t} e^{C_1} \Leftrightarrow$

Generell løsning: $y = Ce^{0.009t} + 2000000$

d) Initialbetingelse gir: $4800000 = Ce^0 + 2000000 \Leftrightarrow C = 2800000$

Spesiell løsning: $y = 2800000e^{0.009t} + 2000000$

e) $6000000 = 2800000e^{0.009t} + 2000000 \Leftrightarrow e^{0.009t} = 1.429 \Leftrightarrow$
$0.009t = \ln 1.429 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 1.429}{0.009} \approx 40$ [år]

(Altså ca i 2049.)