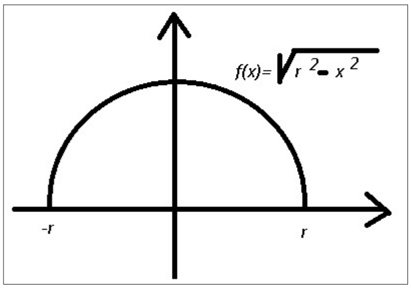
Formelen for areal av sirkel

Formelen $A = \pi r^2$ har vi kunnet i mange år, men det er først etter å ha lært integralregning vi er istand til å bevise denne formelen!

Pussig nok er det vanskeligere å vise denne formelen enn den tilsvarende formelen for volumet av en kule, da vi trenger to ting underveis:

- En lur substitusjon: $\sin u = \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r}$
- Omformingen: $\sin^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2u$



Figur 1: Integralet

I figur 1 over vil halvparten av arealet av en sirkel være arealet under funksjonen

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ mellom $x = -r$ og $x = r$

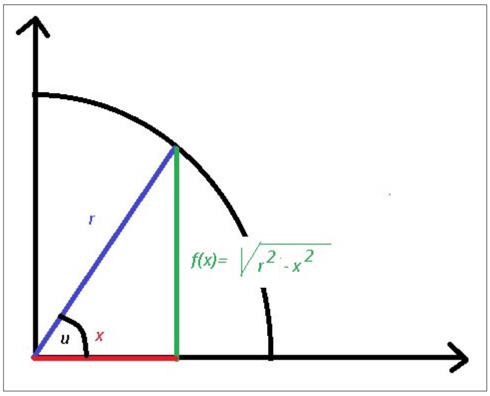
altså:

$$A = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

For å løse dette integralet må vi gjøre et lurt variabelskifte, nemlig:

$r \sin u = \sqrt{r^2 - x^2}$

Se figur:



Figur 2: Variabelskifte

Deriverer vi $r\sin u = \sqrt{r^2 - x^2}$ på begge sider av likhetstegnet får vi:

$r\cos u \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}(-2x) \Leftrightarrow$ (Begge sider derivert med kjerneregel.)

$r\cos u \frac{du}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} \Leftrightarrow$

$r\cos u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\tan u} \Leftrightarrow$ ($\tan u = \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{x}$, se figur 2!)

$dx = -r\cos u \tan u\, du \Leftrightarrow$

$dx = -r\sin u\, du$

Integralet blir da:
$A = 2\int_{\pi}^{0} r\sin u(-r\sin u du) = -2r^2\int_{\pi}^{0}\sin^2 u du$
Legg merke til at når x går fra $-r$ til r, må u gå fra π til 0!

Formelen $\sin^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2u$ gir:
$A = -2r^2\int_{\pi}^{0}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2u)du = -2r^2\ {}_{\pi}^{0}[\frac{u}{2} - \frac{1}{4}\sin(2u)] =$
$-2r^2(0 - 0 - (\frac{\pi}{2} - 0)) = \pi r^2 \qquad QED$