

R2 - 22.01.10

Kapittel 3 og 4.1-4.2

Løsningsskisser

I

Løs ligningene: ved regning:

$$\begin{aligned} \text{a) } 4 \tan x &= 1, \quad x \in [0, 2\pi) \\ \tan x &= \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 0.245 + k\pi \\ L &= \{0.245, 3.39\} \end{aligned}$$

$$\text{b) } 1 + \sin x = \cos^2 x, \quad x \in [0, 2\pi)$$

$$\begin{aligned} 1 + \sin x &= 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \\ \sin x(\sin x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -1 \Leftrightarrow \\ L &= \{0, \pi, \frac{3\pi}{2}\} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = \sqrt{2}, \quad x \in [0, 2\pi)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \sin(3x + \varphi) &= \sqrt{2}, \quad \tan \varphi = \sqrt{3}, \varphi \in 1 \text{ Kv.} \\ \sin(3x + \frac{\pi}{3}) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\ 3x + \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee 3x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + l2\pi \Leftrightarrow \\ x &= -\frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{36} + l\frac{2\pi}{3} \\ L &= \left\{ \frac{5\pi}{36}, \frac{23\pi}{36}, \frac{29\pi}{36}, \frac{47\pi}{36}, \frac{53\pi}{36}, \frac{71\pi}{36} \right\} \end{aligned}$$

II

Vinkelen x ligger i andre kvadrant og $\tan x = -\sqrt{3}$.

Regn ut **eksakte** verdier for:

$$\text{a) } \sin x \quad \text{b) } \cos x \quad \text{c) } \cos 2x$$

Ser at $x = \frac{2\pi}{3}$, men trenger egentlig ikke vite annet enn koordinatene til punktet $(-1, \sqrt{3})$ i andre kvadrant. Tegn figur!

Definisjonene gir:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cap \\ \text{b) } \cos x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Formel gir:

$$\text{c) } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

III

Tabellen nedenfor gir en oversikt over vannstandsvarslingen for et punkt i havnen utenfor Ålesund 14. oktober 2008.

Klokkeslettet t er gitt som antall timer etter midnatt. Vannstanden $v(t)$ er gitt i centimeter.

t [timer]	0	2	3	8	9	10	12	13	15	16	18	20	21	22
$v(t)$ [cm]	200	132	88	108	153	191	208	189	111	74	57	113	158	199

a) Finn ved regning a , b , c og d slik at funksjonen $v(t) = a + b \sin(ct + d)$ passer best mulig med verdiene i tabellen. Gi også navnet på parameterene a, b, c og d .

b) Finn vannstanden kl. 06.00 ved regning.

c) Finn ut hvor lenge vannstanden er over 150 centimeter på formiddagen ved regning?

d) Finn funksjonen $v(t)$ ved hjelp av kurvetilpasning (regresjon) på lommeregneren.

a) Plotter funksjonen på et ruteark, og finner max, min, T og ϕ .

Likevektslinje: $a = \frac{\max + \min}{2} = \frac{208 + 57}{2} = 133$

Amplitude: $b = \frac{\max - \min}{2} = \frac{208 - 57}{2} = 75.5$

Periode: $T = 14.5 - 2 = 12.5$ (Sånn ca.)

$$c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12.5} = 0.503$$

Faseforskyvning: $\phi = 8$ (Sånn ca.)

Da får vi:

$$v(t) = 133 + 75.5 \sin(0.503(t - 8)) = 133 + 75.5 \sin(0.503t - 4.02)$$

$$b) v(6) = 133 + 75.5 \sin(0.503 \cdot 6 - 4.02) = 69.4 \text{ [cm]}$$

$$c) v(t) = 150 \Leftrightarrow 133 + 75.5 \sin(0.503t - 4.02) = 150$$

$$\sin(0.503t - 4.02) = 0.2252 \Leftrightarrow$$

$$0.503t - 4.02 = 0.227 + k2\pi \vee 0.503t - 4.02 = \pi - 0.227 + l2\pi \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{0.227 + 4.02}{0.503} + k \frac{2\pi}{0.503} \vee t = \frac{\pi - 0.227 + 4.02}{0.503} + l \frac{2\pi}{0.503} \Leftrightarrow$$

$$t = 8.44 \vee t = 13.8 \quad (\text{Hvis formiddag})$$

$$\text{Vannstanden over 150 cm: } 13.8 - 8.44 = 5.36 = 5 \text{ t } 22 \text{ min}$$

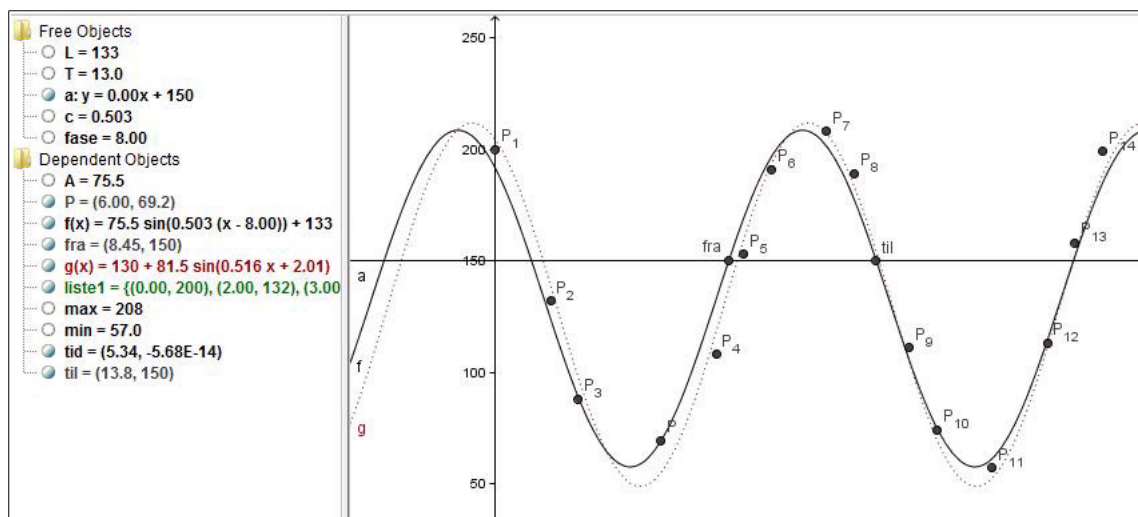
d) Lommeregner:

t til liste L1, $v(t)$ til liste L2 (STAT,EDIT)

STAT,CALC,C:SinReg L1,L2,Y1 gir da:

$$v(t) = 130 + 81.5 \sin(0.516t + 2.00)$$

Skisse av graf:



IV

Gitt funksjonen $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 1$, der $x \in [0, 2\pi]$.

Finn ved regning funksjonens nullpunkter, topp- og bunnpunkter.

Bruk lommeregneren til å finne funksjonens vendepunkter.

Nullpunkter:

abc-formel gir:

$$\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618 \text{ (Umulig)} \vee \cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.6180$$

$$x = 2.24 + k2\pi \vee x = 2\pi - 2.24 + l2\pi$$

$$): (2.24, 0), (4.04, 0)$$

Ekstremalpunkter:

$$f'(x) = 2\cos x(-\sin x) - (-\sin x) = 2\sin x\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = 0 + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + l2\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + m2\pi$$

$$\text{Bunnpunkter: } \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{5}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{5}{4}\right)$$

$$\text{Toppunkter: } (0, -1), (\pi, 1)$$

Vendepunkter:

$$f''(x) = 0 \text{ krever derivasjon.}$$

På lommeregner finner vi isteden ekstremalpunktene til

$$Y1 = \sin(X) - 2\sin(X)\cos(X) \quad (f'(x))$$

CALC,3:minimum og CALC,4:maximum gir:

$$(0.568, f(0.568)) = (0.568, -1.13)$$

$$(2.21, f(2.21)) = (2.21, -0.0476)$$

$$(4.08, f(4.08)) = (4.08, -0.0596)$$

$$(5.71, f(5.71)) = (5.71, -1.13)$$

