R2 - 30.04.15 - Vektorer

Løsningsskisser

Oppgave

Gitt punktene $A = (1,2,1)$, $B = (2,4,3)$ og $C = (-1,7,4)$.

a) Finn parameterfremstilling for et plan α gjennom A, B og C.

Lager vektorer i planet:
$$\overrightarrow{AB} = [1,2,2], \qquad \overrightarrow{AC} = [-2,5,3]$$

Parameterfremstilling på vektorform:
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow [x,y,z] = [1,2,1] + s[1,2,2] + t[-2,5,3]$$
På parameterform:
$$\alpha : \begin{Bmatrix} x = 1 + s - 2t \\ y = 2 + 2s + 5t \\ z = 1 + 2s + 3t \end{Bmatrix}$$

b) Finn ligningen for dette planet.

Kan eliminere s og t i parameterfremstilling, men enklere å lage normalvektor og bruke et av punktene, for eksempel A.

Normalvektor: $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = [-4,-7,9]$$

Velger motsatt retning: $\overrightarrow{n_\alpha} = -[-4,-7,9] = [4,7,-9]$

Ligning for plan gitt av: $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0 \Leftrightarrow [x-1, y-2, z-1] \cdot [4,7,-9] = 0 \Leftrightarrow$

$$4x + 7y - 9z - 9 = 0$$

c) Gitt et annet plan $\beta : x + y + z + 10 = 0$. Finn vinkelen mellom α og β.

Fra ligning: $\overrightarrow{n_\beta} = [1,1,1]$

$$\cos(\angle \overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta}) = \frac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{|\overrightarrow{n_\alpha}||\overrightarrow{n_\beta}|} = \frac{[4,7,-9]\cdot[1,1,1]}{\sqrt{4^2+7^2+9^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{146}\sqrt{3}}$$

Vinkel mellom plan (og normalvektorer): $\angle \overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta} \approx 84.52^\circ$

d) Finn en parameterfremstilling for skjæringslinjen mellom α og β.

Retningsvektor skjæringslinje $\vec{r_l} = \vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 4 & 7 & -9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [16, -13, -3]$

Trenger et punkt på linjen, som må ligge i begge plan,
3 koordinater og 2 ligninger, så vi kan velge en av koordinatene,
for eksempel: $x = 0$

Det gir:

$$\begin{aligned} 7y - 9z - 9 &= 0 \\ y + z + 10 &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} y &= -\tfrac{81}{16} \\ z &= -\tfrac{79}{16} \end{aligned}$$

$D = (0, -\frac{81}{16}, -\frac{79}{16})$

Vektorform: $\overrightarrow{OP} = OD + t\vec{r_l} \iff [x, y, z] = [0, -\frac{81}{16}, -\frac{79}{16}] + [16, -13, -3] \iff$

$$l : \left\{ \begin{aligned} x &= \phantom{-\tfrac{81}{16}} \;\; 16t \\ y &= -\tfrac{81}{16} - 13t \\ z &= -\tfrac{79}{16} - \;\; 3t \end{aligned} \right\}$$

e) Finn skjæringspunktet mellom planet β og linjen gitt av parameterfremstillingn

$$m : \left\{ \begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= -t \end{aligned} \right\}$$

Koordinater til punkt på m må også passe i ligningen for β:

$(1 + t) + (1 + 2t) + (-t) + 10 = 0 \iff 12 + 2t = 0 \iff t = -6$

Skjæringspunkt: $S_{\beta m} = (1 - 6, 1 + 2(-6), -(-6)) = (-5, -11, 6)$

f) Finn vinkelen mellom planet β og linjen m.

Retningsvektor for m taes ut av parameterfremstilling: $\vec{r_m} = [1, 2, -1]$

$\cos \angle \vec{n_\beta}, \vec{r_m} = \frac{\vec{n_\beta} \cdot \vec{r_m}}{|\vec{n_\beta}||\vec{r_m}|} = \frac{[1,1,1]\cdot[1,2,-1]}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.4714$

$\angle \vec{n_\beta}, \vec{r_m} \approx 61.9^\circ$

Vinkel mellom planet og linjen: $90^\circ - 61.9^\circ = 28.1^\circ$

g) Finn avstanden fra planet β til punktet A.

Avstandsformel: $\text{avstand}_{\beta A} = \left| \frac{x_A + y_A + z_A + 10}{\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{1+2+1+10}{\sqrt{3}} \right| = \frac{14}{\sqrt{3}}$

h) Finn avstanden fra linjen m til punktet A.

Fra parameterfremstilling: Punkt $B = (1, 1, 0)$

Lager $\overrightarrow{BA} = [0, 1, 1]$

$$\text{avstand}_{mA} = \text{høyde} = \frac{\text{utspent areal}}{\text{grunnlinje}} = \frac{\left|\overrightarrow{r_m} \times \overrightarrow{BA}\right|}{\left|\overrightarrow{r_m}\right|} = \frac{\sqrt{\overrightarrow{r_m}^2 \overrightarrow{BA}^2 - (\overrightarrow{r_m} \cdot \overrightarrow{BA})^2}}{\sqrt{6}} =$$
$$\frac{\sqrt{6 \cdot 2 - ([1,2,-1] \cdot [0,1,1])^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6 \cdot 2 - 1^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}$$

i) Finn avstanden mellom linjen m og y-aksen.

Vindskjeve linjer:

Lager normalvektor: $\overrightarrow{n_{my}} = \overrightarrow{r_m} \times \overrightarrow{e_y} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [1, 0, 1]$

$$\text{Avstand}_{my} = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{n_{my}}}{\left|\overrightarrow{n_{my}}\right|} = \frac{[1,1,0] \cdot [1,0,1]}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

j) Finn vinkelen mellom m og y-aksen.

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{r_m} \cdot \overrightarrow{e_y}}{\left|\overrightarrow{r_m}\right|\left|\overrightarrow{e_y}\right|} = \frac{[1,2,-1] \cdot [0,1,0]}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \varphi \approx 35.3^\circ$$

k) Gitt punktet $P(1,2,t)$. Finn den verdien av t som gjør at avstanden fra P til planet β blir $2\sqrt{3}$.

Avstandsforml: $a = \left|\frac{x_P + y_P + z_P + 10}{\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{1+2+t+10}{\sqrt{3}}\right| = \frac{|t+13|}{\sqrt{3}}$

Betingelse: $a = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|t+13|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow |t+13| = 6 \Leftrightarrow$
$t + 13 = \pm 6 \Leftrightarrow t = -7 \vee t = -19$

l) Finn den verdien av t som gjør at volumet av tetraederet $ABCP$ blir 10.

Volum: $V = \frac{\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AP}\right|}{6} = \frac{|[-4,-7,9] \cdot [0,0,t-1]|}{6} = \frac{|9t-9|}{6}$

Betingelse: $V = 10 \Leftrightarrow \frac{|9t-9|}{6} = 10 \Leftrightarrow |9t-9| = 60 \Leftrightarrow 9t - 9 = \pm 60 \Leftrightarrow$
$t = \frac{69}{9} \vee t = -\frac{51}{9}$