Løsningsskisser eksamen R2 29.11.2011

Del 1 - Uten hjelpemidler

Oppgave 1

a)

1) Produktregel: $f'(x) = 1e^x + xe^x = e^x(x+1)$

2) Kjerneregel: $g(x) = 2\sin u, \quad u = 2x$
$g'(x) = 2\cos u \cdot 2 = 4\cos 2x$

3) Kjerneregel: $h(x) = 2u^2, \quad u = \sin x$
$h'(x) = 4u \cdot \cos x = 4\sin x \cos x$
Eventuelt:
$h'(x) = 2 \cdot 2\sin x \cos x = 2\sin 2x$

b)

1) Delvis integrasjon: $\int x\cos x dx = x\sin x - \int 1 \sin x = x\sin x + \cos x + C$

2) Delbrøksoppspalting: $\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$
$\int \frac{4}{x^2-4}dx = \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x+2}dx = \ln|x-2| - \ln|x+2| + C = \ln|\frac{x-2}{x+2}| + C$
Eventuelt:
$\ln|\frac{x-2}{x+2}| + C = \ln|\frac{x-2}{x+2}| + \ln D = \ln|D\frac{x-2}{x+2}|$

3) Variabelskifte: $u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$
$\int \sin x \cos^3 x dx = \int \sin x\, u^3 \frac{du}{-\sin x} = -\int u^3 du = -\frac{u^4}{4} + C =$
$C - \frac{1}{4}\cos^4 x$

(Alle integrasjonene kan kontrolleres ved å derivere svarene og se om vi kommmer tilbake til utgangspunktet.)

c)

Aritmetisk rekke med $a_1 = 1$ og differanse $d = 2$.
Direkte summering gir: $S_1 = 1, S_2 = 4, S_3 = 9, S_4 = 16$
Vi ser det velkjente resultatet; summer av ulike tall blir kvadrattall.
Forutsetter vi dette, får vi $S_{100} = 100^2 = 10\,000$
Vi bør kanskje vise at dette resultatet er riktig:
$S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2} = (1 + 2n - 1)\frac{n}{2} = n^2$

d)

Direkte summering gir: $S_1 = 1, S_2 = 8, S_3 = 27, S_4 = 64$
Vi ser at summene er kubikktall, altså at $S_n = n^3$
Dette gir: $S_{100} = 100^3 = 1000\,000$
(Å vise dette resultatet er vanskelig og utenfor R2-pensum.
På delen *med* hjelpemidler kunne vi tatt utganspunkt i at
differansene til følgen er av første grad, følgen er derfor av
andre grad og summene av tredje grad.
Kurvetilpasning av et tredjegradspolynom $(ax^3 + bx^2 + cx + d)$
til tabellen:

1	2	3	4
1	8	27	64

vil da gi: $S_n = n^3$.)

e)

1) Amplitude: $a = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$
Likevektslinje: $d = \frac{f_{\max} + f_{\min}}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$
Perioden avlsest fra $(-1, 3)$ til $(5.3, 3)$: $T = 6.3$
Det gir: $c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6.3} \approx 1.0$

2) Så langt har vi: $f(x) = 2\sin(x + \varphi) + 3$
Da $c = 1.0$ er φ faseforskjellen, som kan leses av på likevektslinjen
mellom $(-1, 3)$ og $(0, 3)$, altså $\varphi = 1$

$f(x) = 2\sin(x + 1) + 3$

f)

Kan bruke integrerende faktor eller separere:
$\frac{y'}{3y+5} = 1, \qquad y \neq -\frac{5}{3}$ (Triviell løsning, inkludert i endelig løsning lenger ned.)
som gir: $\int \frac{y'}{3y+5} dx = \int dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{3y+5} dy = \int dx$
Integrasjon gir:
$\frac{1}{3} \ln|3y + 5| = x + C_1 \Leftrightarrow \ln|3y + 5| = 3x + C_2 \Leftrightarrow$
$|3y + 5| = e^{3x+C_2} \Leftrightarrow 3y + 5 = C_3 e^{3x} \Leftrightarrow$
$y = -\frac{5}{3} + \frac{C_3}{3} e^{3x} \Leftrightarrow y = -\frac{5}{3} + Ce^{3x}$ (Generell løsning.)

Initialbetingelse: $y(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = -\frac{5}{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{11}{3}$

): $\quad y = \frac{11}{3} e^{-3x} - \frac{5}{3}$ (Spesiell løsning.)

g)

$\overrightarrow{AB} = [1, 1, 2], \qquad \overrightarrow{AC} = [6, 3, 4]$

1) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = [-2, 8, -3]$

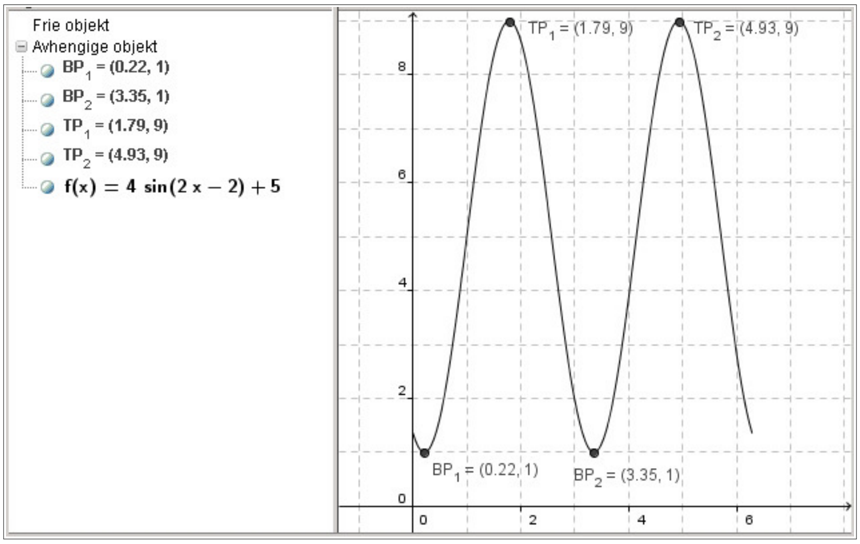
2) $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = [-2, 8, -3] \cdot [1, 1, 2] = -2 + 8 - 6 = 0$
$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC} = [-2, 8, -3] \cdot [6, 3, 4] = -12 + 24 - 12 = 0$

(Dette er som vi vet en del av definisjonen av vektorprodukt;
at det skal stå normalt på begge vektorene vi lager vektorprodukt av.)

Del 2 - Med hjelpemidler

Oppgave 2

a)



b) $\sin(2x - 2)$ vil variere i området $[-1, 1]$, så største verdi må bli:
$f_{\max} = 4 \cdot 1 + 5 = 9$
og minste verdi:
$f_{\min} = 4 \cdot (-1) + 5 = 1$

Minimalverdier når:
$2x - 2 = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi+4}{4} + k\pi$
): $x = \frac{3\pi+4}{4} - \pi = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215$
$x = \frac{3\pi+4}{4} = \frac{3\pi}{4} + 1 \approx 3.35$

Maksimalverdier når:
$2x - 2 = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi+4}{4} + k\pi$
): $x = \frac{\pi+4}{4} = \frac{\pi}{4} + 1 \approx 1.79$
$x = \frac{\pi+4}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} + 1 \approx 4.93$

c)
Flere muligheter her:

I cosinus-funksjon faseforskjøvet $\frac{\pi}{4}+1 \approx 1.79$ mot høyre:
$f(x) = 4\cos(2(x-(\frac{\pi}{4}+1)) + 5 = 4\cos(2x-(\frac{\pi}{2}+2)) + 5$

II Utregning: $f(x) = 4\cos(2x+\varphi)+5$ for eksempelvis punktet
$(1, f(1)) = (1,5)$
$5 = 4\cos(2+\varphi)+5 \Leftrightarrow \cos(2+\varphi) = 0 \Leftrightarrow 2+\varphi = \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow$
$\varphi = \frac{\pi}{2}-2+k\pi$
Velger $\varphi = \frac{\pi}{2}-2-\pi = -\frac{\pi}{2}-2$
og får: $f(x) = 4\cos(2x-\frac{\pi}{2}-2)+5$

III Omforming med formlene: $\sin u = \cos(\frac{\pi}{2}-u)$ og $\cos(-u) = \cos u$
$\sin(2x-2) = \cos(\frac{\pi}{2}-(2x-2)) = \cos(-2x+2+\frac{\pi}{2}) =$
$\cos(-(-2x+2+\frac{\pi}{2})) = \cos(2x-2-\frac{\pi}{2})$
(Amplitude og likevektslinje som før.)

Oppgave 3

$2+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\ldots, \qquad x \neq 0$

a) Geometrisk rekke med $a_1 = 2$ og kvotient $k = \frac{1}{x}$.

b) Konvergens: $-1 < k < 1$, og dessuten $x \neq 0$!

$-1 < \frac{1}{x} \Leftrightarrow -1-\frac{1}{x} < 0$ *(Ikke multipliser med x og mist løsninger!)*
$\frac{-x-1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0$
Tall-linjer gir: $x < -1 \vee x > 0$

$\frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0$
Tall-linjer gir: $x > 1 \vee x < 0$

Slår vi sammen alle kravene får vi konvergensområdet:
$L = \langle \leftarrow, -1\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$

Noen foretrekker å gjøre slik: $|k| < 1 \Leftrightarrow k^2 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < 1 \Leftrightarrow$
$\frac{1-x^2}{x^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} > 0$
Tall-linjer gir igjen: $L = \langle \leftarrow, -1\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$

c) $S(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{2}{1-\frac{1}{x}} = \frac{2x}{x-1}, \qquad x \in \langle \leftarrow, -1\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$
(Utenfor konvergensområdet er formelen meningsløs.)

d) Vanlig hyperbelfunksjon...dette klarer dere selv.
Grafen bør bare tegnes i definisjonsområdet $\langle \leftarrow, -1\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$.

e) $S(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} = -1 \Leftrightarrow \frac{2x+x-1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$
$x = \frac{1}{3}$ (Forkastes da utenfor konvergensområdet/definisjonsområdet.)

Da $x = \frac{1}{3}$ ikke er i konvergensområdet, blir
ikke summen $S(\frac{1}{3})$ lik -1, slik ligningen krever. Dette ser vi også

av den opprinnelige følgen:

$$2 + \frac{2}{\frac{1}{3}} + \frac{2}{(\frac{1}{3})^2} + \ldots = 2 + 6 + 18 + \ldots$$ som ikke på noen måte

konvergerer mot −1...

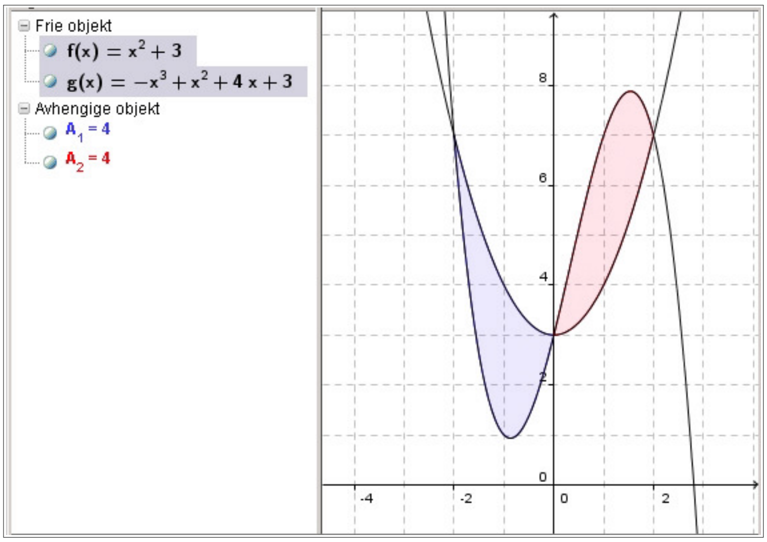
$$S(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} = 3 \Leftrightarrow \frac{2x-(3x-3)}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 3$$

Denne ligningen gir mer mening, $x = 3$ er i konvergensområdet, så summen konvergerer nå mot 3.

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3$$

Oppgave 4

a)



b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 3 = -x^3 + x^2 + 4x + 3 \Leftrightarrow$
$x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow$
$x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$

$$S_1 = (-2, f(-2)) = (-2, 7)$$
$$S_2 = (0, f(0)) = (0, 3)$$
$$S_3 = (2, f(2)) = (2, 7)$$

c) $A_1 = \int_{-2}^{0} (f(x) - g(x))dx = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx =$
$${}_{-2}^{0}\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right] = 0 - (\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2) = 4$$

$A_2 = \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))dx = \int_{0}^{2} (-x^3 + 4x)dx =$
$${}_{0}^{2}\left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2\right] = -\frac{2^4}{4} + 2(2)^2) = 4$$

Vi ser at arealene blir det samme. Vi ser også at dette skyldes at skjæringspunktene ligger symmetrisk om y-aksen, hvilket sammen med det faktum at utregningene bare har andre og fjerde potenser fører til at fortegnene ikke spiller noen rolle, slik at svarene blir like i begge utregningene. Dette studeres litt mer i detalj i d)...

d)
Tilsvarende regning som i b) og c):
Skjæringspunkter:

$f(x) = h(x) \Leftrightarrow x^3 - cx = 0 \Leftrightarrow x(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0 \Leftrightarrow$
$x = 0 \vee x = -\sqrt{c} \vee x = \sqrt{c}$

$A_1 = \int_{-\sqrt{c}}^{0} (f(x) - h(x))dx = \int_{-\sqrt{c}}^{0} (x^3 - cx)dx =$
${}_{-\sqrt{c}}^{0}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{cx^2}{2} \right] = 0 - (\frac{(-\sqrt{c})^4}{4} - \frac{c}{2}(-\sqrt{c})^2) =$
$-\frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{4}$

$A_2 = \int_{0}^{\sqrt{c}} (h(x) - f(x))dx = \int_{0}^{\sqrt{c}} (-x^3 + cx)dx =$
${}_{0}^{\sqrt{c}}\left[-\frac{x^4}{4} + c\frac{x^2}{2} \right] = -\frac{(\sqrt{c})^4}{4} + c\frac{(\sqrt{c})^2}{2} =$
$-\frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{4}$

): $A_1 = A_2$ *QED*

Oppgave 5

a) Lager fulle kvadrater:

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 6z + 9 = 14 + 4 + 9 + 9 \Leftrightarrow$
$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 6^2$

): Sentrum: $S = (2, -3, 3)$, Radius: $R = 6$

b) Koordinatene fra l innsatt i kuleligningen gir:

$(2 + 2t - 2)^2 + (-3 + 4t + 3)^2 + (3 + 4t - 3)^2 = 36 \Leftrightarrow$
$4t^2 + 16t^2 + 16t^2 = 36 \Leftrightarrow 36t^2 = 36 \Leftrightarrow t = \pm 1$

Skjæringspunkter:

$A = (2 + 2(-1), -3 + 4(-1), 3 + 4(-1) = (0, -7, -1)$

$B = (2 + 2 \cdot 1, -3 + 4 \cdot 1, 3 + 4 \cdot 1) = (4, 1, 7)$

c) Planene har samme normalvektor, parallell med retningsvektoren for linjen l, $\vec{r} = [2, 4, 4]$, så vi velger $\vec{n} = [1, 2, 2]$ $(= \frac{1}{2}\vec{r})$

α : (Gjennom A)

$[x, y + 7, z + 1] \cdot [1, 2, 2] = 0 \Leftrightarrow$
$x + 2y + 2z + 16 = 0$

β : (Gjennom B)

$[x - 4, y - 1, z - 7] \cdot [1, 2, 2] = 0 \Leftrightarrow$
$x + 2y + 2z - 20 = 0$

(Kontroll:

Avstander til origo fra planene: $d_\alpha = \left| \frac{ax+by+cz+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right| = \frac{|d|}{|\vec{n}|} = \frac{16}{3}$

og $\quad d_\beta = \frac{20}{3}$, slik at vi får:

$d_\alpha + d_\beta = \frac{16}{3} + \frac{20}{3} = 12$, som stemmer med at dette må være det samme som diameteren i kulen; $2R = 2 \cdot 6 = 12$.)

Oppgave 6

a) Endringshastigheten er negativ, da vannstanden avtar, og proporsjonal med kvadratroten til vannstanden;

Endringsfart = - const • $\sqrt{\text{Vannstanden}}$

eller mer matematisk:

$y' = -k\sqrt{y}$ [enhet???], $t \in [0, \rightarrow\rangle$ [minutter], $k > 0$

b)

Separerer: $y^{-\frac{1}{2}}y' = -k, \quad y \neq 0$ (Triviell løsning)

$\int y^{-\frac{1}{2}}y'dt = -\int kdt$

Kjerneregel gir: $\int y^{-\frac{1}{2}}dy = -\int kdt$

Integrasjon:

$$\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -kt + C_1 \Leftrightarrow 2y^{\frac{1}{2}} = -kt + C_1 \Leftrightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2}(C_1 - kt)$$

Kvadrering gir: $y = \frac{1}{4}(C - kt)^2 \qquad QED$

(Egentlig er også $y = 0$ en del av den generelle løsningen!)

(Kvadrering kan gi falske løsninger, men kravene i oppgaven gjør at disse ikke er noen problem, kravet til k, initialbetingelser og virkelighetens krav eliminerer disse uansett.)

$y(0) = h \Leftrightarrow h = \frac{1}{4}C^2 \Leftrightarrow C = \pm 2\sqrt{h}$ ($h > 0$ følger av settingen.)

(Oppgaven har valgt den positive, da den negative gir løsninger hvor vannstanden stiger (!) .)

$$y(10) = \frac{h}{4} \Leftrightarrow \frac{h}{4} = \frac{1}{4}(2\sqrt{h} - 10k)^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{h} - 10k = \pm\sqrt{h} \Leftrightarrow$$

$$10k = 2\sqrt{h} \pm \sqrt{h} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{h}}{5} \pm \frac{\sqrt{h}}{10} \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{\sqrt{h}}{10} \vee k = \frac{3\sqrt{h}}{10}$$ (Oppgaven har valgt den første.)

Tanken er tom når:

$$y(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(2\sqrt{h} - \frac{\sqrt{h}}{10}t)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{h} - \frac{\sqrt{h}}{10}t = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 - \frac{t}{10} = 0 \Leftrightarrow t = 20 \text{ [minutter]}$$

(Ikke på eksamen, men når man studerer denne oppgaven hjemme i fred og ro, bør man lage skyvere av C, k og h i GeoGebra og eksperimentere litt for å se hvordan dette påvirker løsningen, og visualisere teoretiske løsninger som kan opptre når vi ser bort fra de praktiske kravene i det fysiske tilfellet.)