Løsningsskisser - Blandede oppgaver

X-oppgaver: 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8

X 1.2

a)
Bruker kvadratsetninger:
$K:\ (x^2 - 2x + 1^2) + (y^2 - 4y + 2^2) + (z^2 + 2z + 1^2) = 3 + 1^2 + 2^2 + 1^2$
$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3^2$

b)
Sentrum: $S = (1, 2, -1)$ Radius: $R = 3$

c)
$A(2, 0, 1)$ på kuleflate:
$VS = (2-1)^2 + (0-2)^2 + (1+1)^2 = 9$
$HS = 9$

d)
Retningsvektor for l: $\overrightarrow{SA} = [1, -2, 2]$
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + t\overrightarrow{SA} \Leftrightarrow [x, y, z] = [1, 2, -1] + t[1, -2, 2] \Leftrightarrow$

$$l:\ \left\{\begin{array}{c} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{array}\right\}$$

Skjæring når:
$(1 + t - 1)^2 + (2 - 2t - 2)^2 + (-1 + 2t + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow 9t^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 1$

$t = -1:\quad A = (1 + 1, 2 - 2 \cdot 1, -1 + 2 \cdot 1) = (2, 0, 1)$
$t = -1:\quad B = (1 - 1, 2 - 2(-1), -1 + 2(-1)) = (0, 4, -3)$

X 1.3

a)
$\overrightarrow{AB} = [-a, b, 0]$
$\overrightarrow{AC} = [-a, 0, c]$

b)
Normalvektor: $\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [bc, ac, ba] = \vec{v}$ $\quad QED$

c)
$\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \quad P = (x, y, z)$
$[bc, ac, ba] \cdot [x - a, y - 0, z - 0] = 0 \Leftrightarrow bcx - abc + acy + abz = 0 \Leftrightarrow$
$bcx + acy + abz = abc \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad QED$

X 1.5

a)
Bakhjul: $x^2 + (y^2 - 6y + 3^2) = 0 + 3^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = 3^2$
): $S_b = (0,3) \quad R_b = 3$

Forhjul: $(x^2 - 28x + 14^2) + (y^2 - 20y + 10^2) = -196 + 14^2 + 10^2 \Leftrightarrow$
$(x-14)^2 + (y-10)^2 = 10^2$
): $S_f = (14,10) \quad R_f = 10$

b)
$\overrightarrow{S_bS_f} = [14,7] \quad \Rightarrow \overrightarrow{S_bS_f} = 7\sqrt{2^2+1^2} = 7\sqrt{5}$
Minste avstand: $a = \overrightarrow{S_bS_f} - R_b - R_f = 7\sqrt{5} - 3 - 10 = 7\sqrt{5} - 13 \approx 2.65$
(Fasiten feil, de har regnet ut avstanden mellom to punkter på hjulene når de er ***lengst*** unna hverandre...)

X 1.6

a) Skalarprodukt, gidder ikke...
b)
$\overrightarrow{AB} = [3,0,1]$
$\overrightarrow{AC} = [1,-1,-1]$
Normalvektor: $\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [3,0,1] \times [1,-1,-1] = [1,4,-3]$

$\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \quad \overrightarrow{AP} = [x-1, y-1, z]$ gir:

$$[1,4,-3] \cdot [x-1, y-1, z] = 0 \Leftrightarrow x - 1 + 4y - 4 - 3z = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 3z - 5 = 0$$

c)
$V = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{6}[1,4,-3] \cdot [2,9,4] = \frac{13}{3} \approx 4.33$

d)
$P = (0,0,z_p)$

$\overrightarrow{PD} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \Leftrightarrow \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0 \Leftrightarrow [3,10,4-z_p] \cdot [1,4,-3] = 0 \Leftrightarrow$
$3 + 40 - 12 + 3z_p = 0 \Leftrightarrow z_p = -\frac{31}{3}$
): $P = (0,0,-\frac{31}{3})$

X 1.7

Noe er feil i oppgaveteksten...linjen i b) kan ikke ligge i planet α.
Gidder ikke finne ut hva de egentlig mente her...

X 1.8

a)
$\alpha: \quad 2x - y + z - 3 = 0$

Avstand: $d = \frac{ax_p - by_p + cz_p + d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2 \cdot 3 - (-4) + 2 - 3}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{6} \approx 3.67$

b)
$\overrightarrow{PQ} = [-5, 10, 5]$, bruker retningsvektor $\vec{r_l} = [-1, 2, 1]$

l : $[x, y, z] = \overrightarrow{OP} + t\vec{r_l} = [3, -4, 2] + t[-1, 2, 1] = [3 - t, -4 + 2t, 2 + t]$

R : $2(3 - t) - (-4 + 2t) + (2 + t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 9 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 3$

$\overrightarrow{OR} = [3 - 3, -4 + 2 \cdot 3, 2 + 3] = [0, 2, 5] \Leftrightarrow R = (0, 2, 5)$

c)'
Alle koordinatene til *R* ligger mellom tilsvarende koordinater for *P* og *Q*.
(Må passere *R*, i α, på vei fra *P* til *Q*!)

d)
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = [3, -4, 2] + \frac{1}{2}[-5, 10, 5] = [\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{2}] \Leftrightarrow M = (\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{2})$

e)

Parameterfremstilling for planet $\alpha : 2x - y + z - 3 = 0$:

$$\left\{ \begin{matrix} x = s \\ y = t \\ z = 3 - 2s + t \end{matrix} \right\}$$

(Velger $x = s$ og $y = t$, lurere enn eks. 7 side 51 i lærebok!)

Alle punkter *S* i planet har da koordinater $S = (s, t, 3 - 2s + t)$

S like langt fra *P* og *Q*: $\left|\overrightarrow{PS}\right| = \left|\overrightarrow{SQ}\right| \Leftrightarrow$

$|[s - 3, t + 4, 3 - 2s + t - 2]| = |[-2 - s, 6 - t, 7 - (3 - 2s + t)]| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(s - 3)^2 + (t + 4)^2 + (1 - 2s + t)^2} = \sqrt{(-2 - s)^2 + (6 - t)^2 + (4 + 2s - t)^2} \Leftrightarrow$

$(s - 3)^2 + (t + 4)^2 + (1 - 2s + t)^2 = (-2 - s)^2 + (6 - t)^2 + (4 + 2s - t)^2 \Leftrightarrow$

$(s - 3)^2 + (t + 4)^2 + (1 - 2s + t)^2 = (-2 - s)^2 + (6 - t)^2 + (4 + 2s - t)^2$

en del regning...

$s = t - 1$

Denne ligningen gjelder for alle punkter i planet som er like langt fra *P* og *Q*, setter inn i parameterfremstillingen for planet α og får:

$$\left\{ \begin{matrix} x = t - 1 \\ y = t \\ z = 3 - 2(t - 1) + t \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x = t - 1 \\ y = t \\ z = 5 - t \end{matrix} \right\}$$ (som er en linje i planet α)

(Bytter vi til en ny *t*: $t_{ny} = t - 1$ får vi fasitsvaret i boken.)

Alternativ:

For å slippe rottegn og kvadrering, kan man istedenfor betingelsen

$$\left|\overrightarrow{PS}\right| = \left|\overrightarrow{SQ}\right|$$

bruke en betingelse gitt av projeksjoner:

Et punkt $S = (x, y, z)$ som har samme avstand til P og Q er bestemt av at
projeksjonen $\overrightarrow{PS}$ på $\overrightarrow{SQ}$; $\frac{\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}$,
må være lik
projeksjonen $\overrightarrow{SQ}$ på $\overrightarrow{PQ}$; $\frac{\overrightarrow{SQ} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}$,
altså har vi:

$$\frac{\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{\overrightarrow{SQ} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SQ} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

som gir litt enklere regning:

$$[s-3, t+4, 3-2s+t-2] \cdot [-5, 10, 5] = [-2-s, 6-t, 7-(3-2s+t)] \cdot [-5, 10, 5] \Leftrightarrow$$
$$15t - 15s + 60 = 15s - 15t + 90 \Leftrightarrow 30t - 30s - 30 = 0 \Leftrightarrow$$
$$s = t - 1$$