R2 - Eksamen V10

26.05.10

Løsningsskisser

Si ifra hvis dere finner feil!
(Feil i oppgave 2 rettet 27.05.11)

Del 1

Oppgave 1

a)
Produktregel: $f'(x) = 2x\cos 3x + x^2(-\sin(3x)3) = x(2\cos 3x - 3x\sin 3x)$
(Og kjerneregel på: $\cos u, u = 3x$)

b)
1)
Delvis integrasjon: $5\int xe^{2x}dx = 5x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{5}{2}\int e^{2x}dx =$
$\frac{5}{2}xe^{2x} - \frac{5}{2}\frac{e^{2x}}{2} + C = \frac{5}{4}e^{2x}(2x-1) + C$

2)
Variabelskifte:
Direkte: $3\int \frac{2x}{x^2-1}dx = 3\int \frac{u'}{u}dx = 3\int \frac{1}{u}du = 3\ln|u|+C = 3\ln|x^2-1|+C$

Eller: $u = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$
$\int \frac{6x}{x^2-1}dx = \int \frac{6x}{u}\frac{du}{2x} = 3\int \frac{1}{u}du = 3\ln|u|+C = 3\ln|x^2-1|+C$

c) Lineær differensialligning, kan bruke integrerende faktor $IF = e^{\int -2dx}$,
eller løse som separabel differensialligning:
$2y + 3 \neq 0$ gir:
$\frac{y'}{2y+3} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{y'}{2y+3}dx = \int 1dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{2y+3}dy = \int 1dx \Leftrightarrow$
$\frac{1}{2}\ln|2y+3| = x + C_1 \Leftrightarrow \ln|2y+3| = 2x + C_2 \Leftrightarrow 2y + 3 = C_3e^{2x} \Leftrightarrow$
$y = Ce^{2x} - \frac{3}{2}$ (Generell løsning)
(Bør også undersøke forutsetningen: $2y + 3 = 0$ gir: $y = -\frac{3}{2}$ som er dekket av $C = 0$.)

Initialbetingelse gir: $2 = C - \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = \frac{7}{2}$

Spesiell løsning: $y = \frac{7}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}$

d)
1) Addisjon (eller eliminasjon av $\sin u \sin v$) gir:

$\cos(u-v) + \cos(u+v) = 2\cos u\cos v \Leftrightarrow \cos u\cos v = \frac{1}{2}(\cos(u-v) + \cos(u+v))$ *QED*
2)

$u = v = x$ innsatt i d) 1) gir:

$$\cos x \cos x = \tfrac{1}{2}(\cos 0 + \cos 2x) \Leftrightarrow \cos^2 x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int \cos^2 x dx = \int (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2x)dx = \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}\tfrac{\sin 2x}{2} + C = \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{4}\sin 2x + C$$

e)

Fundamentalteoremet: $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$

Vi har: $g'(x) = f(x)$ og $h(x) = g''(x) = (g'(x))' = f'(x)$

1)

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = \int_{-3}^{2} g'(x)dx = g(2) - g(-3) = 28 - 6 = 22$$

2)

$$\int_{-3}^{1} h(x)dx) = \int_{-3}^{1} g''(x)dx = [g'(x)]_{-3}^{1} = [f(x)]_{-3}^{1} = f(1) - f(-3) = -2 - 0 = -2$$

Oppgave 2

a)

$\overrightarrow{AB} = [0-3, 2-0, 0-(-2)] = [-3, 2, 2]$

$\overrightarrow{AC} = [1-3, -1-0, 4-(-2)] = [-2, -1, 6]$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = [2 \cdot 6 - 2(-1), -((-3)6 - 2(-2)), (-3)(-1) - 2(-2)] =$$

$[14, 14, 7] = 7[2, 2, 1]$

b)

Punkt i plan α: $R = (x, y, z)$

Velger normalvektor: $\vec{n} = \frac{1}{7}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = [2, 2, 1]$

$\overrightarrow{AR} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x-3, y-0, z-(-2)] \cdot [2, 2, 1] = 0 \Leftrightarrow$

α : $2x + 2y + z - 4 = 0$

c)

Velger retningsvektor $\vec{r} = \vec{n} = [2, 2, 1]$

Vektorform: l : $[x, y, z] = \overrightarrow{OP} + t\vec{r} \Leftrightarrow$

$$[x, y, z] = [5, 4, 4] + t[2, 2, 1] \Leftrightarrow l : \left\{ \begin{array}{c} x = 5 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = 4 + t \end{array} \right\}$$

(Hvis du hadde $\vec{r} = \vec{n} = [14, 14, 7]$ får du:

$$\left\{\begin{array}{c} x = 5+14s \\ y = 4+14s \\ z = 4+7s \end{array}\right\}$$ Kan skifte variabel: $14s = 2t \Leftrightarrow t = 7s \Leftrightarrow s = \frac{1}{7}t$)

xz –plan: $y = 0 \Leftrightarrow 4+2t = 0 \Leftrightarrow t = -2$

$S_{xz} = (5+2(-2), 4+2(-2), 4+(-2)) = (1,0,2)$

d)
$V_{ABCQ} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AQ}\right|$
der $\overrightarrow{AQ} = [5+2t-3, 4+2t-0, 4+t-(-2)] = [2t+2, 2t+4, t+6]$

$V_{ABCQ} = \frac{1}{6}|[14,14,7]\cdot[2t+2,2t+4,t+6]| = \frac{7}{6}|[2,2,1]\cdot[2t+2,2t+4,t+6]|$
$\frac{7}{6}|4t+4+4t+8+t+6| =$
$\frac{7}{6}|9t+18| = \frac{7\cdot 9}{6}|t+2| = \frac{21}{2}|t+2|$

e)
$V_{ABCQ} = 42 \Leftrightarrow \frac{21}{2}|t+2| = 42 \Leftrightarrow |t+2| = \frac{42\cdot 2}{21} \Leftrightarrow |t+2| = 4 \Leftrightarrow$

$t+2 = 4 \vee t+2 = -4 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = -6$

$t = 2$: $Q_1 = (5+2\cdot 2, 4+2\cdot 2, 4+2) = (9,8,6)$
$\vee$
$t = -6$: $Q_2 = (5+2(-6), 4+2(-6), 4+(-6)) = (-7,-8,-2)$

Viktig ikke å miste en løsning her!
Når man løser ligninger, må man ***alltid*** spørre seg selv: Hvor mange løsninger kan forventes her?

Når det gjelder tallverdi, husk disse ekvivalensene:
$|a| = b \Leftrightarrow a = \pm b$
og
$$|a| = b \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a = b, \quad a \geq 0 \\ a = -b, \quad a < 0 \end{array}\right\}$$

Oppgave 3

a)
$y'' + \frac{2}{5}y' + \frac{26}{25}y = 0$ gir karakteristisk ligning: $r^2 + \frac{2}{5}r + \frac{26}{25} = 0$
abc-formel gir: $r = -\frac{1}{5} \pm i$

Generell løsning: $y = e^{-\frac{1}{5}x}(C\sin x + D\cos x)$ QED

b)
Initialbetingelser:

$y(0) = 5$ gir: $5 = 1(C\cdot 0 + D\cdot 1) \Leftrightarrow D = 5$

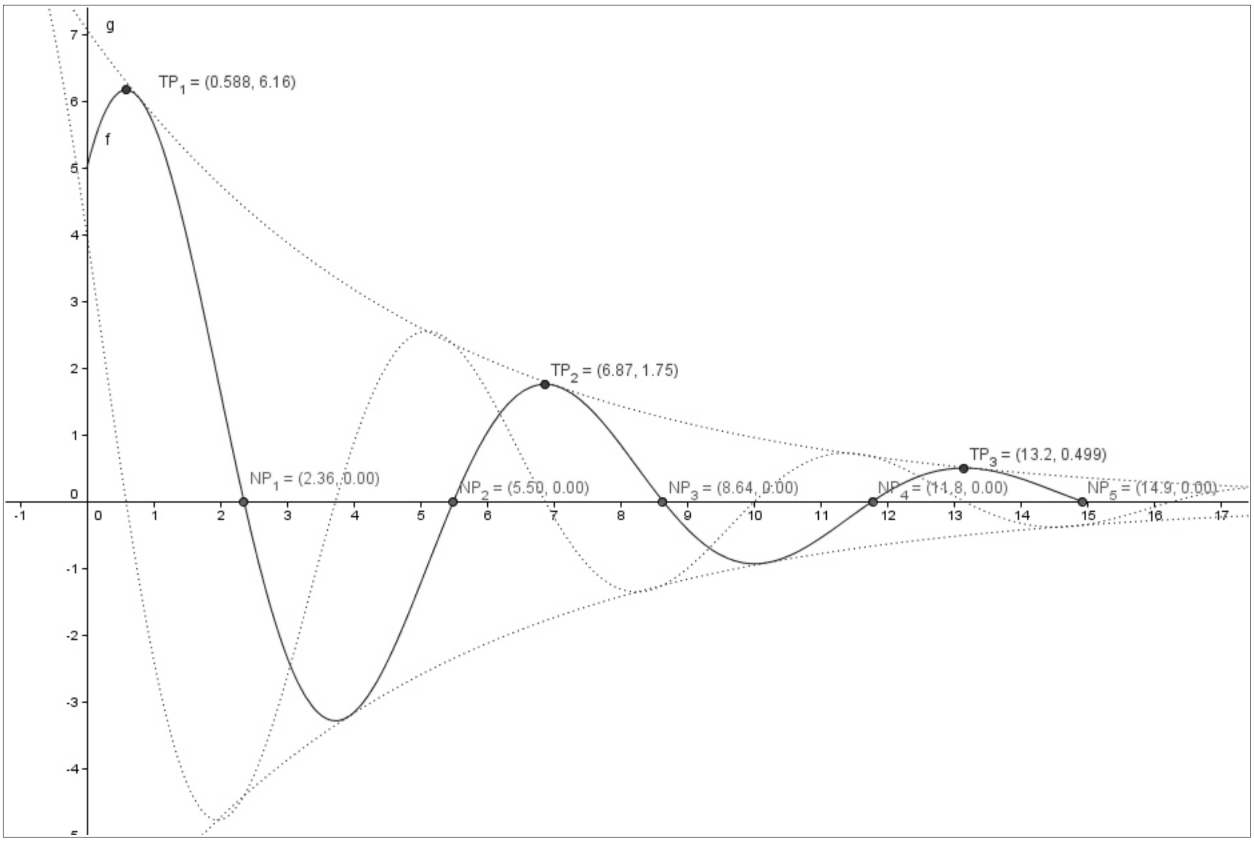
$y(\frac{3\pi}{4}) = 0$ gir: $0 = e^{-\frac{3\pi}{20}}(C\sin\frac{3\pi}{4} + D\cos\frac{3\pi}{4}) \Leftrightarrow$

$$0 = C\frac{\sqrt{2}}{2} + D(-\frac{\sqrt{2}}{2}) \Leftrightarrow C - D = 0 \Leftrightarrow C = D = 5$$

Spesiell løsning: $\quad y = e^{-\frac{1}{5}x}(5\sin x + 5\cos x) = 5e^{-0.2x}(\sin x + \cos x) \qquad QED$

Oppgave 4

a)
$f(x) = 5e^{-0.2x}(\sin x + \cos x) = 5\sqrt{2}\,e^{-0.2x}\sin(x + \frac{\pi}{4})$ (se e)) $\qquad D_f = \langle 0, 15\rangle$



4	Funksjon f	Funksjon 5.00 sqrt(2.00) e^	Funksjon[5.00 sqrt(2.00) e^(-(0.200) x) sin(x + π / 4.00), 0.00, 15.0]
5	Punkt NP_1	Nullpunkt for f i intervallet [2.00,	Nullpunkt[f, 2.00, 3.00]
6	Punkt NP_2	NP_1 + (π, 0.00)	NP_1 + (π, 0.00)
7	Punkt NP_3	NP_1 + (2.00 π, 0.00)	NP_1 + (2.00 π, 0.00)
8	Punkt NP_4	NP_1 + (3.00 π, 0.00)	NP_1 + (3.00 π, 0.00)
9	Punkt NP_5	NP_1 + (4.00 π, 0.00)	NP_1 + (4.00 π, 0.00)
10	Funksjon f'	f'(x) = f'(x)	f'(x) = f'(x)
11	Tall x_1	x(Nullpunkt[f', 0.00, 1.00])	x(Nullpunkt[f', 0.00, 1.00])
12	Tall x_2	x(Nullpunkt[f', 3.00, 4.00])	x(Nullpunkt[f', 3.00, 4.00])
13	Tall x_3	x(Nullpunkt[f', 6.00, 7.00])	x(Nullpunkt[f', 6.00, 7.00])
14	Tall x_4	x(Nullpunkt[f', 10.0, 11.0])	x(Nullpunkt[f', 10.0, 11.0])
15	Tall x_5	x(Nullpunkt[f', 13.0, 14.0])	x(Nullpunkt[f', 13.0, 14.0])
16	Punkt TP_1	(x_1, f(x_1))	(x_1, f(x_1))
17	Punkt TP_2	(x_3, f(x_3))	(x_3, f(x_3))
18	Punkt TP_3	(x_5, f(x_5))	(x_5, f(x_5))

(Omhyllet av $\pm 5\sqrt{2}\,e^{-0.2x}$)

b)

Nullpunkter: $f(x) = 0$
$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = 0 + n\pi \Leftrightarrow$
$x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$
): $(\frac{3\pi}{4}, 0), (\frac{7\pi}{4}, 0), (\frac{11\pi}{4}, 0), (\frac{15\pi}{4}, 0), (\frac{19\pi}{4}, 0)$
Eller: $(2.36, 0), (5.50, 0), (8.64, 0), (11.8, 0), (14.9, 0)$

c)
Produktregel:
$f'(x) = 5(-0.2)e^{-0.2x}(\sin x + \cos x) + 5e^{-0.2x}(\cos x - \sin x) =$
$4e^{-0.2x}\cos x - 6e^{-0.2x}\sin x = 2e^{-0.2x}(2\cos x - 3\sin x)$ *QED*

d)
Fortegnslinje bestemt av $2\cos x - 3\sin x = \sqrt{2^2 + 3^2}\,\sin(x + 2.554)$

$\sin(x + 2.554) = 0 \Leftrightarrow x + 2.554 = 0 + k\pi \Leftrightarrow x = -2.554 + k\pi$
): Skifter fortegn for x : $0.5876, 3.729, 6.871, 10.01, 13.15$

$f'(x)$: ——o- - -o———o- - - o———o- - -

TP_1 : $f(0.5876) = 6.164$
TP_2 : $f(6.871) = 1.754$
TP_3 : $f(13.15) = 0.4993$
(Hvorfor bare 3 gjeldende siffer i TP_3 i oppgave her??? Inkonsekvent oppgave!
Og hvorfor 4 siffer, 3 må da være nok...
Dessuten; Hvis de på død og liv vil ha 4 gjeldende siffer, burde de
også ha skrevet $e^{-0.2000x}$ istedenfor $e^{-0.2x}$ og $x \in \langle 0.0000, 15.00 \rangle$ ...
Forklaringen på dette rotet ligger i oppgave 5, der de ønsker litt høy nøyaktighet...)
e)
$f(x) = 5e^{-0.2x}\sqrt{1^2 + 1^2}\,\sin(x + \phi)$, $\tan\phi = 1, \phi \in 1$ Kvadrant

$= 5\sqrt{2}\,e^{-0.2x}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 7.071e^{-0.200x}\sin(x + 0.7854)$
(Best å bruke 4 siffer, da oppgaven ser ut til å like det...)

f)
Se a)
I $f(x) = 5\sqrt{2}\,e^{-0.2x}\sin(x + \frac{\pi}{4})$ ligger $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ i området $[-1, 1]$,
så $f(x)$ ligger i området $[5\sqrt{2}\,e^{-0.2x}, 5\sqrt{2}\,e^{-0.2x}] = [q(x), p(x)]$
der $A = 5\sqrt{2} \approx 7.071$

Oppgave 5

a) Se oppgave 4 a): $x_n = -\frac{\pi}{4} + n\pi =$
$-\frac{\pi}{4} + \pi + n\pi - \pi = (\pi - \frac{\pi}{4}) + (n-1)\pi \approx 2.356 + (n-1)\pi$ *QED*

b)
Aritmetisk følge med $x_1 = \pi - \frac{\pi}{4} \approx 2.356$ og $d = \pi$

Antall nullpunkter i $\langle 0, 30 \rangle$:
$2.356 + (n-1)\pi < 30 \Leftrightarrow n < 9.799$): $n = 9$

c)

Jeg antar at det er nok å bruke funksjonsverdiene, og at følgende utregning ikke er nødvendig:

Ekstremalpunkter for: $x = -2.554 + k\pi$
): Toppunkter for $x_n = -2.554 + \pi + (n-1) \cdot 2\pi = 0.5876 + (n-1)2\pi$

Funksjonsverdier for toppunktene:
$f_n = f(x_n) = 5e^{-0.2(0.5876+(n-1)2\pi)}(\sin(0.5876 + (n-1)2\pi) + \cos(0.5876 + (n-1)2\pi) =$
$5.0e^{1.139-1.257n}1.387 =$ $((n-1)2\pi$ gir hele omløp og samme verdi for alle sinus og cosinus...)
$6.935e^{1.139}(e^{-1.257})^n = 21.66 \cdot 0.2845^n = 6.162 \cdot 0.2845^{n-1}$
som er geometrisk følge på formen:
$a_n = a_1 k^{n-1}$ med $a_1 = 6.162$ og kvotient $k = 0.2845$

Hvis man skal regne eksakt her ender man opp med $\tan^{-1}(\ldots)$ eller $\sin^{-1}(\ldots)$ i a_1, så jeg antar at det ikke var ment å bruke verdifull tid på slikt...

Så, antagelig nok å bruke de oppgitte tallene:
$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1.754}{6.164} = 0.2846$ og $\frac{a_3}{a_2} = \frac{0.499}{1.754} = 0.2845$
): Geometrisk følge med kvotient $k \approx 0.2845$
(Alt rotet med 4 siffer i oppgave 4 og likevel fremdeles ikke nok til å gi lik k med 4 siffer...)

$f_5 = 6.164 \cdot 0.2845^{5-1} = 0.04038$

d)
$-1 < k < 1$: Konvergent geometrisk rekke!

$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{6.164}{1-0.2845} = 8.615$

Oppgave 6 - Alternativ I

a)
$-bv - ky = ma \Leftrightarrow -by' - ky = my'' \Leftrightarrow$
$my'' + by' + ky = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$

b)
Se oppgave 3 og 4:
Spesiell løsning: $y(t) = 5e^{-0.2x}(\sin x + \cos x) = 7.07e^{-0.200x}\sin(x + 0.785)$

Her er b, k og m oppgitt med 2 gjeldende siffer, så egentlig bør 2 siffer være nok:
$y(t) = 7.1e^{-0.20x}\sin(x + 0.79)$ [m], $x \in \langle 0, \rightarrow \rangle$ [sek]

c)
Oppgave 4 og 5 viste at x –verdiene (her tid) til nullpunktene utgjøre en aritmetisk følge med differansen $d = \pi \approx 3.1$ sekunder mellom hver passering av likevektsstillingen.

d)
Oppgave 5 viste at kvotienten til utslaget var $k = 0.2845$, så utslagene minker med $1 - 0.2845 = 0.7155 \approx 71.5\%$ fra et utslag til det neste.

Oppgave 6 - Alternativ II

a)
$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n$ er en aritmetisk rekke med $a_1 = 1$ og $d = 1$,
så $S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2} = (1+n)\frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

$S_8 = \frac{8(8+1)}{2} = 36$

b)
Med lommeregner:
Bruker sum(seq(X ^3,X,1,n) med forskjellige n til å eksperimentere oss frem til når 15000 passeres.

...
$n = 15$: 14400
$n = 16$: 18496
): Må ha 16 ledd for å passere 15000

Litt mer elegant:
Kan også legge inn som funksjon med Y1=sum(seq(K ^3,K,1,X)) og enten bruke grafen eller TABLE til å se når 15000 passeres.

Kontroll med formelen som kommer i b) :
$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ gir:
$(\frac{n(n+1)}{2})^2 = 15000 \Leftrightarrow n(n+1) = 2\sqrt{15000} \approx 244.95 \Leftrightarrow$ (Forkaster negativ løsning)
$n^2 + n - 244.95 = 0 \Leftrightarrow x = 15.2$ (Forkaster -16.2)

c)
Formel: $f(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

Induksjonsbevis:

$n = 1$:
$f(1) = (\frac{1(1+1)}{2})^2 = 1$ $OK!$

$n \to n+1$:
Må vise $f(n+1) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$:
$f(n+1) = f(n) + a_n = (\frac{n(n+1)}{2})^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) =$
$(n+1)^2\frac{n^2+4(n+1)}{4} = \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4) = \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ $OK!$

d)
$VS = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (Se c))

$HS = (\sum_{k=1}^{n} k)^2 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ (Se a))

Kvadrerer vi HS får vi: $(\frac{n(n+1)}{2})^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = VS$ QED