R2 - 2.6 - 3.5

04.12.09
Løsningsskisser

I

Lavt kompetansenivå: Definisjoner, enkle omregningsformler

Gjør om til absolutt vinkelmål (radianer):

a) 15° b) 135°

a) $15^\circ = \frac{\pi 15^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{12}$ b) $135^\circ = \frac{\pi 135^\circ}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4}$

Gjør om til grader:

c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{7\pi}{12}$

c) $\frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ \frac{\pi}{3}}{\pi} = 60^\circ$ d) $\frac{7\pi}{12} = \frac{180^\circ \frac{7\pi}{12}}{\pi} = 105^\circ$

II

a), b): Lavt kompetansenivå: Trigonometriske grunnligninger
c): Middels kompetansenivå: Må skjønne omløp og tenke litt.

Løs ligningene:

a) $\sin x = -\frac{1}{2}, \quad x \in [0^\circ, 360^\circ\rangle$
b) $2\cos x = \sqrt{2}, \quad x \in [0^\circ, 360^\circ\rangle$
c) $\tan x = -2, \quad x \in [0^\circ, 720^\circ\rangle$

a) $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -30^\circ + k360^\circ \vee x = 180^\circ - (-30^\circ) + l360^\circ \Leftrightarrow$
$x = 330^\circ \vee x = 210^\circ$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 45^\circ \vee x = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

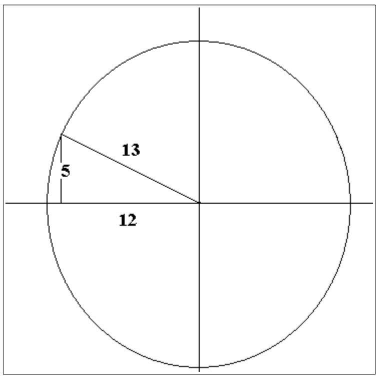
c) $\tan x = -2 \Leftrightarrow x = -63.4^\circ + k180^\circ$
$L = \{116.6^\circ, 296.6^\circ, 476.6, 656.6\}$

III

Middels kompetansenivå: Typeoppgave, men krever forståelse av definisjonene.
(Se oppgave 321.)

Vinkelen u ligger i andre kvadrant og $\sin u = \frac{5}{13}$.
Regn ut ***eksakte*** verdier for:
a) $\cos u$ b) $\tan u$ c) $\sin 2u$ d) $\tan 2u$

Lager en rettvinklet trekant med sider $5, 13$ og $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$:



Da har vi:

a) $\cos u = -\frac{12}{13}$ b) $\tan u = -\frac{5}{12}$

c) $\sin 2u = 2\sin u \cos u = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot (-\frac{12}{13}) = -\frac{120}{169}$

d) $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = (-\frac{12}{13})^2 - (\frac{5}{13})^2 = \frac{119}{169}$

$$\tan 2u = \frac{\sin 2u}{\cos 2u} = \frac{-\frac{120}{169}}{\frac{119}{169}} = -\frac{120}{119}$$

IV

Middels kompetansenivå: Typeoppgaver

Løs ligningene:

a) $2\sin x \cos x - \cos x = 0, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$

b) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$

c) $\cos x \cdot \tan x + \cos^2 x \cdot \sin x = 0, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$

d) $3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 3\cos^2 x - 1 = 0, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$
(Tips: Erstatt 1 med $\sin^2 x + \cos^2 x$!)

a) $2\cos x(\sin x - \frac{1}{2}) = 0$ Faktorisering med felles faktor!
$\cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2}$
$L = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\}$

b) $2u^2 - 5u + 2 = 0, \quad u = \sin x$
$\sin x = \frac{1}{2} \vee \sin x = 2$ (Umulig.)
$L = \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$

c) $\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + \cos^2 x \cdot \sin x = 0, \quad \cos x \neq 0$
$\sin x + \cos^2 x \sin x = 0$
$\sin x(1 + \cos^2 x) = 0$ Faktorisering med felles faktor!
$\sin x = 0 \vee \cos^2 x = -1$ (Umulig.)
$L = \{0, \pi\}$

d) $3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 3\cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$
$2\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$

$\cos x \neq 0$ gir: (Se Eksempel 3 side 131.)
$2\tan^2 x - 5\tan x + 2 = 0$

$\tan x = \frac{1}{2} \vee \tan x = 2$ (Samme andregradsligning som IV b...)
$L = \{0.464, 1.11, 3.61, 4.25\}$

V

Høyt kompetansenivå: Må ha god forståelse for å gjennomføre induksjonsbevis.

Tallfølgen med femkant-tallene ser slik ut:
f_n : $1, 5, 12, 22$
Ser vi på differansene, d_n, ser vi at de blir $4, 7, 10, \ldots$
altså den aritmetiske følgen. $d_n = d_1 + d(n-1) = 4 + 3(n-1) = 3n + 1$

Da har vi dette rekursive uttrykket for femkanttallene: $f_{n+1} = f_n + d_n = f_n + 3n + 1$

Bruk induksjonsbeviset til å vise at det eksplisitte uttrykket for femkanttallene er:
$f_n = \frac{n(3n-1)}{2}$

$n = 1$: Formel gir: $f_1 = \frac{1(3 \cdot 1 - 1)}{2} = 1$ $OK!$

$n \to n+1$:
Antar at $f_n = \frac{n(3n-1)}{2}$ gjelder for $n = n$, må vise at f_{n+1} blir:
$f_{n+1} = \frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$

Bruker rekursjonsuttrykket:
$f_{n+1} = f_n + (3n+1) = \frac{n(3n-1)}{2} + (3n+1) =$
$\frac{3n^2 - n + 6n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} = \frac{3(n+1)(n+\frac{2}{3})}{2} =$ (abc-formel)
$\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$ QED

VI

Høyt kompetansenivå: Må se sammenhenger og forstå matematisk tekst.

Ekstraoppgave, hvis dere har god tid. (Teller bare positivt!)

a) Vis at $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$.

b) Bruk dette til å løse ligningen $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

a) Formelen $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$ gir:
$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} =$
$\sin x \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$ QED

b) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow$
$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$
$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + l2\pi \Leftrightarrow$

$$x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{12} + l2\pi$$

(Burde ha oppgitt et område, for eksempel $[0, 2\pi\rangle$ i oppgaveteksten.
Da ville vi fått $L = \{\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\}$)