R2 - Heldagsprøve 04.05.09

Løsningsskisser

Del 1

Oppgave 1

a) Produktregel: $f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x = x(2\sin x + x\cos x)$
b) Kjerneregel: $f(x) = 3u^2, \qquad u = \ln(2x) + 1$
$f'(x) = 3 \cdot 2uu' = 6u(\frac{1}{2x}2) = \frac{6(\ln(2x)+1)}{x}$

c) $f(x) = (x^2)^2 + 2(x^2) - 3 = (x^2-1)(x^2+3)$

Nullpunkter: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0$
): $(1,0),\ (-1,0)$

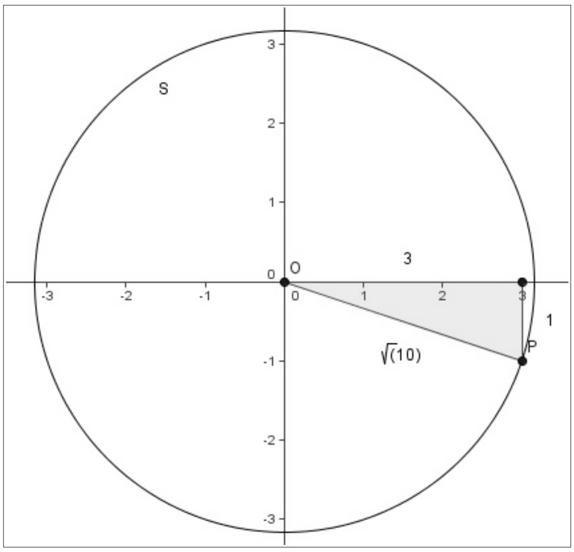
Ekstremalpunkter: $f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2+1)$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
): Bunnpunkt $(0,-3)$

Vendepunkter: $f''(x) = 12x^2 + 4$
Positiv for alle x, ingen vendepunkt.

d) Delbrøkoppspaltning: $\int \frac{x+3}{x^2-1}dx = \int(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1})dx = 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + C = \ln\frac{(x-1)^2}{|x+1|} + C$

e) Geometrisk rekke med $a_1 = 7$ og $k = 0.2$.
$S_\infty = \frac{a_1}{1-k} = \frac{7}{1-0.2} = 8.75$

f) Figur:



Figuren gir oss: $\sin v = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos v = \frac{3}{\sqrt{10}}$
$\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v = \frac{9}{10} - \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$

g) 1) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}\frac{1}{2} = \frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{1+\cos x}$, da $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\cos x} dx =_0^{\frac{\pi}{3}} [\tan(\frac{x}{2})] = \tan\frac{\pi}{6} - \tan 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3) Separabel:

$y' + y'\cos x - y = 0 \Leftrightarrow y'(1+\cos x) = y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{1+\cos x}, y \neq 0, 1+\cos x \neq 0$

$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{1+\cos x} dx \Leftrightarrow \ln|y| = \tan(\frac{x}{2}) + C \Leftrightarrow y = Ce^{\tan(\frac{x}{2})}$

h) $4y'' + 4y' + 17y = 0$

Karakteristisk ligning: $4r^2 + 4r + 17 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 4\cdot 17}}{2\cdot 4}$

$r = \frac{-4\pm\sqrt{4^2(1-17)}}{8} = \frac{-4\pm 4\sqrt{-16}}{8} = \frac{-1\pm 4i}{2} = -\frac{1}{2} \pm 2i$

Generell løsning: $y = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$

i) 1)

$n = 1$:

$a_1 = 1^2 - 1 + 1 = 1 \quad OK$

$n \rightarrow n+1$:

Må vise at $a_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1$

$a_{n+1} = a_n + 2n = n^2 - n + 1 + 2n = n^2 + n + 1\ OK$

2) $a_2 = a_1 + d_1, a_3 = a_2 + d_2, a_4 = a_3 + d_3, \ldots, a_n = a_{n-1} + d_{n-1}$

Slik at $a_n = a_1 + d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_{n-1} = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i$.

3) d_i er en aritmetisk følge, så summen blir:

$\sum_{i=1}^{n-1} d_i = \frac{n-1}{2}(d_1 + d_{n-1}) = \frac{n-1}{2}(2 + 2(n-1)) = n(n-1)$

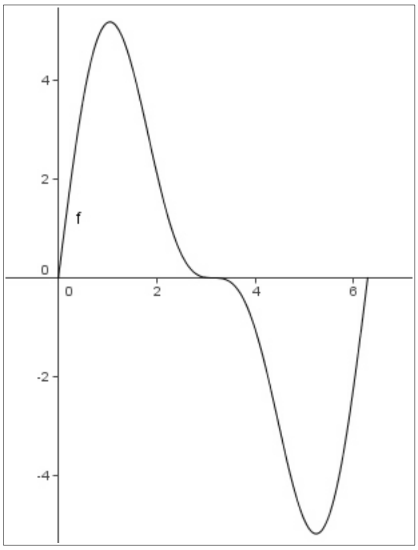
$a_n = a_1 + n(n-1) = 1 + n(n-1) = n^2 - n + 1\ QED$

Del 2

Oppgave 2

$f(x) = 4\sin x + 4\sin x\cos x = 4\sin x(1+\cos x)$

a)



b) Nullpunkter: $4\sin x(1+\cos x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi \vee x = \pi + k2\pi$

): $(0,0), (\pi,0), (2\pi,0)$

c) Produktregel på siste ledd:

$f'(x) = 4\cos x + 4\cos^2 x + 4\sin x(-\sin x) = 4\cos x + 4\cos^2 x - 4\sin^2 x =$
$4\cos x + 4\cos^2 x - 4(1-\cos^2 x) = 8\cos^2 x + 4\cos x - 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 8\cdot(-4)}}{2\cdot 8} = \frac{-4\pm\sqrt{16(1+8)}}{16} = \frac{-4\pm 12}{16}$

$\cos x = -1 \vee \cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pi + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow$
$x = \pi + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow$
$L = \{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$

a) og $f'(x)$): Toppunkt: $(\frac{\pi}{3}, f(\frac{\pi}{3})) = (\frac{\pi}{3}, 3\sqrt{3})$
$(2\pi, 0)$

Bunnpunkt: $(0,0)$
$(\frac{5\pi}{3}, f(\frac{5\pi}{3})) = (\frac{5\pi}{3}, -3\sqrt{3})$

Terrassepunkt: $(\pi, 0)$

c) $\int f(x)dx = \int(4\sin x + 2\sin 2x)dx = -4\cos x - \cos(2x) + C$

$\int_0^\pi f(x)dx = {}_0^\pi[-4\cos x - \cos(2x)] = -4(-1) - 1 - (-4\cdot 1 - 1) = 8$

Oppgave 3

a) $\overrightarrow{AB} = [4,0,0] \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 4$, $\overrightarrow{DC} = [4,0,0] \Rightarrow |\overrightarrow{DC}| = 4$
$\overrightarrow{AD} = [0,4,0] \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = 4$, $\overrightarrow{BC} = [0,4,0] \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 4$
): Sidene er parvis parallelle og alle sidene er like lange, altså kvadrat.

b) $\overrightarrow{CT} = [0,0,2\sqrt{6}]$

$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CT} = [4,4,0] + [0,0,2\sqrt{6}\,] = [4,4,2\sqrt{6}\,] \Leftrightarrow T = (4,4,2\sqrt{6}\,)$

c) Ser på rettvinklet trekant ACT:

$\overrightarrow{AT} = [4,4,2\sqrt{6}\,] \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (2\sqrt{6}\,)^2} = 2\sqrt{14}$

$\sin\angle CAT = \frac{|\overrightarrow{CT}|}{|\overrightarrow{AT}|} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{14}} \approx 0.6547$

$\angle CAT = 40.9^\circ$

(Kunne også brukt $\cos\angle CAT = \frac{\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AT}||\overrightarrow{AC}|}$, men litt unødvendig når vi har en rettvinklet trekant.)

d) Lager en normalvektor til planet:

$\overrightarrow{BT} \times \overrightarrow{BD} = [0,4,2\sqrt{6}\,] \times [-4,4,0] = [-8\sqrt{6}\,,-8\sqrt{6}\,,16] = -8[\sqrt{6}\,,\sqrt{6}\,,-2]$

Velger $\overrightarrow{n_\alpha} = [\sqrt{6}\,,\sqrt{6}\,,-2]$

Punkter i planet: $P = (x,y,z)$ og $B = (4,0,0)$.

Ligning: $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0 \Leftrightarrow [x-4,y,z] \cdot [\sqrt{6}\,,\sqrt{6}\,,-2] = 0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{6}\,x - 4\sqrt{6} + \sqrt{6}\,y - 2z = 0$ (Multipliserer med $\frac{3}{\sqrt{6}}$)

): α : $3x + 3y - \sqrt{6}\,z - 12 = 0$ QED

e) xy –planet har normalvektor $\overrightarrow{e_z} = [0,0,1]$

Vinkel gitt av: $\cos v = \frac{\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{e_z}}{|\overrightarrow{n_\alpha}||\overrightarrow{e_z}|} = \frac{[\sqrt{6}\,,\sqrt{6}\,,-2]\cdot[0,0,1]}{\sqrt{(\sqrt{6}\,)^2+(\sqrt{6}\,)^2+2^2}\cdot 1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$v = 120^\circ$

$\overrightarrow{n_\alpha}$ sto altså "feil" vei, så vi må korrigere til $180^\circ - v = 60^\circ$

f) Hvis $P = (x,y,z)$ er på linjen n har vi vektorfremstillingen:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OC} + t\cdot\overrightarrow{n_\alpha} \Leftrightarrow [x,y,z] = [4,4,0] + t[\sqrt{6}\,,\sqrt{6}\,,-2]$

eller på parameterform: $n : \left\{ \begin{array}{c} x = 4 + \sqrt{6}\,t \\ y = 4 + \sqrt{6}\,t \\ z = -2t \end{array} \right\}$

(Eller $\left\{ \begin{array}{c} x = 4 + 3s \\ y = 4 + 3s \\ z = -\sqrt{6}\,s \end{array} \right\}$ hvis vi skifter til $t = \frac{3}{\sqrt{6}}s$)

g) Avstanden er for eksempel projektsjonen av $\overrightarrow{BC}$ på normalvektoren $\overrightarrow{n_\alpha}$:

$d = \left|\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{n_\alpha}}{|\overrightarrow{n_\alpha}|}\right| = \left|\frac{[0,4,0]\cdot[\sqrt{6}\,,\sqrt{6}\,,-2]}{4}\right| = \left|\frac{4\sqrt{6}}{4}\right| = \sqrt{6}$

h) F i α gir ligningen: $3(4 + \sqrt{6}\,t) + 3(4 + \sqrt{6}\,t) - \sqrt{6}\,(-2t) - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$12 + 3\sqrt{6}\,t + 12 + 3\sqrt{6}\,t + 2\sqrt{6}\,t - 12 = 0 \Leftrightarrow 8\sqrt{6}\,t + 12 = 0 \Leftrightarrow$

$t = -\frac{12}{8\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$

$\overrightarrow{OF} = [4 + \sqrt{6}\,(-\frac{\sqrt{6}}{4}),4 + \sqrt{6}\,(-\frac{\sqrt{6}}{4}),-2(-\frac{\sqrt{6}}{4})] = [\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}] \Leftrightarrow$

$F = (\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{\sqrt{6}}{2})$

(Kunne også brukt avstanden d og en enhetsnormalvektor:

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} - d\frac{\overrightarrow{n_\alpha}}{|\overrightarrow{n_\alpha}|} = [4,4,0] - \sqrt{6}\,\frac{[\sqrt{6},\sqrt{6},-2]}{4} = [\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}]$

Må da være oppmerksom på retningen til $\overrightarrow{n_\alpha}$ og minustegnet i utregningen...)

i) Retningsvektor linje m gjennom A og B: $\overrightarrow{r_m} = \overrightarrow{AB} = [4,0,0]$

Retningsvektor linje n er $\overrightarrow{n_\alpha}$.

Avstanden mellom de vindskjeve linjene blir da $d = \frac{|BC\cdot(\overrightarrow{r_m}\times\overrightarrow{n_\alpha})|}{|\overrightarrow{r_m}\times\overrightarrow{n_\alpha}|}$ hvor B og C er punkter på hver av de to linjene.

$d = \frac{|[0,4,0]\cdot([4,0,0]\times[\sqrt{6},\sqrt{6},-2])|}{|[4,0,0]\times[\sqrt{6},\sqrt{6},-2]|} = \frac{|[0,4,0]\cdot[0,8,4\sqrt{6}]|}{|[0,8,4\sqrt{6}]|} = \frac{32}{4\sqrt{0^2+2^2+(\sqrt{6})^2}} = \frac{32}{4\cdot\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2.53$

Oppgave 4

a) Vekstfarten i dag ($t = 0$ [år]):

$y'(0) = k(B-y(0))(y(0)-A) = 0.00001\cdot(11000-6000)\cdot(6000-2000) = 200$ [dyr/år]

b) Vekstfart når $y = 8000$ dyr: $y' = 0.00001\cdot(11000-8000)\cdot(8000-2000) = 180$ [dyr/år]

c) Separabel: $y' = k(B-y)(y-A) \Leftrightarrow \frac{y'}{(B-y)(y-A)} = k, \quad y \neq A, y \neq B$

$\int \frac{1}{(B-y)(y-A)}dy = k\int dt$

Delbrøkoppspaltning gir: $\frac{1}{B-A}\int(\frac{1}{B-y} + \frac{1}{y-A})dy = k\int dt \Leftrightarrow$

$\int(\frac{1}{B-y} + \frac{1}{y-A})dy = k(B-A)\int dt \Leftrightarrow$

$-\ln|B-y| + \ln|y-A| = k(B-A)t + D \Leftrightarrow$

$\ln\left|\frac{y-A}{B-y}\right| = k(B-A)t + D \Leftrightarrow$

$\frac{y-A}{B-y} = Ce^{k(B-A)t} \Leftrightarrow y - A = BCe^{k(B-A)t} - yCe^{k(B-A)t} \Leftrightarrow$

$y + yCe^{k(B-A)t} = BCe^{k(B-A)t} + A \Leftrightarrow$

Generell løsning: $y = \frac{A+BCe^{k(B-A)t}}{1+Ce^{k(B-A)t}} \vee y = B$ ($y = A$ inkludert i $C = 0$)

Med våre tall:

$y = \frac{2000+11000\cdot Ce^{0.00001(11000-2000)t}}{1+Ce^{0.00001(11000-2000)t}} = \frac{2000+11000Ce^{0.09t}}{1+Ce^{0.09t}}$

Initialbetingelse gir: $y(0) = 6000 \Leftrightarrow \frac{2000+11000C}{1+C} = 6000 \Leftrightarrow C = \frac{4}{5}$

Spesiell løsning: $y = \frac{2000+8800e^{0.09t}}{1+0.8e^{0.09t}}$ [dyr], t i år.

d) Med $y(0) = 1900$ får vi: $\frac{2000+11000C}{1+C} = 1900 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{91} \approx -0.011$

$y = \frac{2000+11000\cdot(-\frac{1}{91})\cdot e^{0.09t}}{1+(-\frac{1}{91})e^{0.09t}} = \frac{2000-121e^{0.09t}}{1-0.0110e^{0.09t}}$

Utdøing når:

$\frac{2000-121e^{0.09t}}{1-0.0110e^{0.09t}} = 0 \Leftrightarrow 2000 - 121e^{0.09t} = 0 \Leftrightarrow e^{0.09t} = \frac{2000}{121} \Leftrightarrow$
$0.09t = \ln\frac{2000}{121} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{2000}{121}}{0.09} \approx 31$ [år]