

Prøve R2 - Vektorer

Kapittel 1 - Vektorer

24.10.08

I

Gitt vektorene $\vec{u} = [2, 1, 3]$ og $\vec{v} = [1, 5, 4]$.

a) Hva er projeksjonen av \vec{u} på \vec{v} ?

b) Hva er arealet av trekanten som er utspent av \vec{u} og \vec{v} ?

c) Finn en vektor som står normalt på både \vec{u} og \vec{v} .

d) Finn ligningen for et plan gjennom punktet $P = (2, 3, 4)$ som er parallelt med \vec{u} og \vec{v} .

e) Finn dette planets skjæringspunkt med y -aksen.

(Trykkfeil: d) og e) var feil nummerert.)

$$a) p = |\vec{u}| \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{[2,1,3] \cdot [1,5,4]}{\sqrt{1^2+5^2+4^2}} = \frac{19}{42} \sqrt{42} \approx 2.93$$

$$b) A = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} |[2, 1, 3] \times [1, 5, 4]| = \frac{1}{2} |[-11, -5, 9]| = \frac{\sqrt{11^2+5^2+9^2}}{2} = \frac{\sqrt{227}}{2} \approx 7.53$$

(Eventuelt:

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} = \frac{\sqrt{14 \cdot 42 - 19^2}}{2} = \frac{\sqrt{227}}{2})$$

$$c) \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = [-11, -5, 9]$$

$$d) \vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \quad \text{der } Q = (x, y, z)$$

\Updownarrow

$$[-11, -5, 9] \cdot [x-2, y-3, z-4] = 0$$

\Updownarrow

$$11x + 5y - 9z - 1 = 0$$

e) y -akse:

$$x = 0 \wedge z = 0 : \quad 5y - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{5}$$

$$): \quad (0, \frac{1}{5}, 0)$$

II

Gitt punktene $A = (1, 0, 0)$, $B = (5, 4, 1)$, $C = (-1, 3, 2)$ og $D = (2, 1, 9)$.

Finn volumet av pyramiden med grunnflaten ABC og toppunkt D .

$$\overrightarrow{AB} = [4, 4, 1], \quad \overrightarrow{AC} = [-2, 3, 2], \quad \overrightarrow{AD} = [1, 1, 9]$$

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |([4, 4, 1] \times [-2, 3, 2]) \cdot [1, 1, 9]| = \frac{1}{6} |[5, -10, 20] \cdot [1, 1, 9]| = \frac{175}{6} \approx 29.2$$

III

$$\text{Gitt linjene } l : \begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = -t + 1 \end{cases} \text{ og } m : \begin{cases} x = -2s + 2 \\ y = 2s + 1 \\ z = 3s \end{cases}$$

- a) Finn avstanden mellom l og m .
 b) Finn skjæringspunktet mellom l og xy -planet.
 c) Finn en parameterfremstilling for et plan α gjennom m og som er parallelt med l .
 Gitt et punkt $P = (2, 3, 4)$
 d) Hva er avstanden fra l til P ?
 e) Hva er avstanden fra α til P ?

a) Retningsvektorer: $\vec{r}_l = [4, 1, -1]$, $\vec{r}_m = [-2, 2, 3]$
 $\vec{r}_l \times \vec{r}_m = [4, 1, -1] \times [-2, 2, 3] = [5, -10, 10] = 5[1, -2, 2]$
 Velger normalvektor: $\vec{n} = [1, -2, 2]$
 Punkt på l : $P_l = (1, -1, 1)$ ($t = 0$)
 Punkt på m : $P_m = (2, 1, 0)$ ($s = 0$)
 $\overrightarrow{P_l P_m} = [1, 2, -1]$

Avstand mellom vindskjeve linjer: $d = \left| \frac{\overrightarrow{P_l P_m} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{[1, 2, -1] \cdot [1, -2, 2]}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \right| = \frac{5}{3} \approx 1.67$

b) xy -plan: $z = 0 \Rightarrow -t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$

): $S = (4 \cdot 1 + 1, 1 - 1, 0) = (5, 0, 0)$

c) Punkt på m , velger $s = 0$: $P_m = (2, 1, 0)$ (Se a).)

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_m} + s\vec{r}_m + t\vec{r}_l$ gir: $\begin{cases} x = 2 + 4s - 2t \\ y = 1 + s + 2t \\ z = -s + 3t \end{cases}$

d) $d_{lP} = \frac{|\overrightarrow{P_l P} \times \vec{r}_l|}{|\vec{r}_l|} = \frac{|[1, 4, 3] \times [4, 1, -1]|}{|[4, 1, -1]|} = \frac{|[-7, 13, -15]|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{7^2 + 13^2 + 15^2}}{\sqrt{18}} = \frac{1}{6} \sqrt{2} \sqrt{443} \approx 4.96$

e) $d_{\alpha P} = \frac{|\overrightarrow{P_m P} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \left| \frac{[0, 2, 4] \cdot [1, -2, 2]}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \right| = \frac{4}{3} \approx 1.33$

V

En kuleflate κ har ligningen $x^2 + y^2 + z^2 - 18y - 4z - 4x + 8 = 0$

a) Finn sentrum S og radius R i kuleflaten κ .

b) Finn skjæringspunktene mellom linjen $l : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$ og kuleflaten κ .

Et plan α står normalt på l . Snittsirkelen mellom dette planet og kuleflaten har radius $r = 3$.

c) Planet α deler kuleflaten κ i to kulesegmenter, hva er overflaten til det minste av disse to kulesegmentene?

d) Hva er ligningen til planet α ?

a) $(x^2 - 4x + 2^2) + (y^2 - 18y + 9^2) + (z^2 - 4z + 2^2) = -8 + 2^2 + 9^2 + 2^2 \Leftrightarrow$

$$(x-2)^2 + (y-9)^2 + (z-2)^2 = 9^2$$

$$R = 9 \quad S = (2, 9, 2)$$

$$\text{b) } (t-2)^2 + (1+2t-9)^2 + (t-2)^2 = 9^2 \Leftrightarrow 6t^2 - 40t + 72 = 81 \Leftrightarrow 6t^2 - 40t - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{10}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{454} \approx -0.218 \quad \vee \quad t = \frac{1}{6}\sqrt{454} + \frac{10}{3} \approx 6.88$$

$$S_1 = \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{454}, 1 + 2 \cdot \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{454} \right), \frac{10}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{454} \right) =$$

$$\left(-\frac{1}{6}\sqrt{454} + \frac{10}{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{454} + \frac{23}{3}, -\frac{1}{6}\sqrt{454} + \frac{10}{3} \right) \approx (-0.218, 0.564, -0.218)$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{6}\sqrt{454} + \frac{10}{3}, 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\sqrt{454} + \frac{10}{3} \right), \frac{1}{6}\sqrt{454} + \frac{10}{3} \right) =$$

$$\left(\frac{1}{6}\sqrt{454} + \frac{10}{3}, \frac{1}{3}\sqrt{454} + \frac{23}{3}, \frac{1}{6}\sqrt{454} + \frac{10}{3} \right) \approx (6.88, 14.8, 6.88)$$

$$\text{c) Pythagoras: } h = 9 - \sqrt{9^2 - 3^2} = 9 - 6\sqrt{2}$$

$$\text{Overflate: } O = 2\pi R h = 2\pi 9(9 - 6\sqrt{2}) = 18\pi(9 - 6\sqrt{2}) \approx 29.1$$

$$\text{d) } \vec{n} = [1, 2, 1]$$

Trenger punkt P i planet:

$$\vec{OP} = \vec{OS} \pm \frac{6\sqrt{2}}{|\vec{n}|} \vec{n} = [2, 9, 2] \pm \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}} [1, 2, 1] = [2 \pm \sqrt{12}, 9 \pm 2\sqrt{12}, 2 \pm \sqrt{12}]$$

$$\approx [5.46, 15.9, 5.46] \text{ eller } [-1.46, 2.07, -1.46]$$

α :

$$[1, 2, 1] \cdot [x - (2 \pm \sqrt{12}), y - (9 \pm 2\sqrt{12}), z - (2 \pm \sqrt{12})] = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - (2 \pm \sqrt{12}) + 2(y - (9 \pm 2\sqrt{12})) + z - (2 \pm \sqrt{12}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 2y + z - (12\sqrt{3} + 22) = 0 \text{ eller } x + 2y + z + (12\sqrt{3} - 22) = 0$$

$$(x + 2y + z - 42.8 = 0 \text{ eller } x + 2y + z - 1.22 = 0)$$