# Fagdag torsdag 30.04.2015

## Flere treningsoppgaver i CAS:

*Med løsningsskisser*

---

### Oppgave 1

Bruk CAS til å bevise at gjennomsnittet av $x$-verdiene til nullpunktene er lik gjennomsnittet av $x$-verdiene til vendepunktene i en fjerdegradsfunksjon på formen $f(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

Gjennomsnittet av x-verdiene til nullpunktene er da: $\frac{a+b+c+d}{4}$

CAS:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | f(x):=k (x-a) (x-b) (x-c) (x-d) | Definerer funksjon. |
| 2 | f'(x)=0 | Betingelse for vendepunkt gir ligning |
| | {x= ...., x= .... } | Løs gir liste med to løsninger |
| 3 | Sum[$2]/2 | Sum[] på listen i raden over |
| | $\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}d$ | og divisjon gir svaret vi ønser. |

### Oppgave 2

Vi har gitt vektorene $\vec{u} = [2, a, 0]$ og $\vec{v} = [3, c, 0]$.

Videre har vi gitt at $|\vec{u} \times \vec{v}| = 1$og $\vec{u} \cdot \vec{v} = 18$.

a) Bruk CAS til å finne $a$ og $c$.

$\vec{w}$ er posisjonsvektoren til et punkt i et plan gitt av ligningen $z = 8$.

b) Bestem volumet til et tetraeder som er utspent av vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$.

a)

| | |
|---|---|
| 1 | u:=(2,a,0)<br>$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| 2 | v:=(3,c,0)<br>$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| 3 | u*v=18<br>$\rightarrow\ a\,c + 6 = 18$ |
| 4 | \|u⊗v\|=1<br>$\rightarrow\ \lvert 3a - 2c \rvert = 1$ |
| 5 | {$3, $4}<br>Løs: $\left\{\{a = 3, c = 4\}, \left\{a = -\frac{8}{3}, c = -\frac{9}{2}\right\}, \{a = -3, c = -4\}, \left\{a = \frac{8}{3}, c = \frac{9}{2}\right\}\right\}$ |

b)

| | |
|---|---|
| 7 | V:=G h/3 der h=8, da u og v vil ligge i xy-planet hvis alle vektorene blir lagt med Origo som startpunkt: |
| 8 | V:= 1 8/6<br>$\rightarrow \frac{4}{3}$ |
| 9 | Med w og volumformelen: |
| 10 | w:=(s,t,8)<br>$\rightarrow \begin{pmatrix} s \\ t \\ 8 \end{pmatrix}$ |
| 11 | b:=\|(u⊗v)*w\|/6<br>$\rightarrow \frac{4}{3} \lvert 3a - 2c \rvert$ |
| 12 | 4 / 3 abs(3a - 2c)<br>ByttUt, a=3,c=4: $\frac{4}{3}$ |

(Byttet ut *a* og *c* med 3 og 4, ville fått det samme med andre løsninger av *a* og *c*.)

## Oppgave 3

Bruk CAS på denne oppgaven:

| Tid: [år] | 1996 (t=0) | 2007 (t=11) |
|---|---|---|
| Bestand: [par] | 5 | 43 |

Tabellen viser en telling av antall fødedyktige ulvepar i en bestand av ulver i det sentrale Idaho i 1996 ($t = 0$) og 2007 ($t = 11$).
I en modell for antall fødedyktge ulvepar $y$ som funksjon av tiden $t$ (målt i antall år etter 1996) gjelder følgende differensialligning:

$$y' = ky(y-4)(90-y)$$

som er en variant av den logistiske differensialligningen, hvor vi i tillegg til å ha en øvre grense for bestanden, også har en minste grense som bestanden ikke må komme under hvis den ikke skal dø ut.

a) Vis at $y = \frac{90+4Ce^{-k86t}}{1+Ce^{-k86t}}$ er en generell løsning av differensialligningen. Finnes det en annen løsning? (Som ikke er dekket av alle mulige valg av C?)

b) Bestem $k$ og $C$ ut fra verdiene i tabellen.

c) Hva er den øvre grense for antallet fødedyktige ulvepar i det sentrale Idaho?

d) Bruk modellen til å regne ut på hvilket tidspunkt veksthastigheten er størst.
Hva er veksthastigheten på dette tidspunktet?

d) I hvilket år ville bestanden ha dødd ut hvis det var 3 fødedyktige ulvepar i 1996?

a) og b):

| | |
|---|---|
| 1 | `f(t):=LøsODE[y'=k (y-4) (90-y),y,t]`<br>→ $f(t) := \frac{4\ c_6\ e^{-86kt} - 90}{c_6\ e^{-86kt} - 1}$ |
| 2 | `f(0)=5`<br>→ $\frac{4\ c_6 - 90}{c_6 - 1} = 5$ |
| 3 | `f(11)=43`<br>→ $\frac{4\ c_6\ e^{-946k} - 90}{c_6\ e^{-946k} - 1} = 43$ |
| 4 | `{$2, $3}`<br>Løs: $\left\{\left\{c_6 = -85, k = -\frac{1}{946} \ln\left(\frac{47}{3315}\right)\right\}\right\}$ |
| 5 | `Numerisk[$4,3]`<br>→ $\{\{c_6 = -85, k = 0.0045\}\}$ |

a) Vi ser at løsningen er den samme som i oppgaven, hvis vi skifter fortegn på konstantleddet og multipliserer med -1 oppe og nede i brøken.

b) På Fil, Innstillinger, Avrundinger bør du sette minst 3 gjeldende siffer for å få svarene
$C = -85$ og $k = 0.0045$

c)

| | |
|---|---|
| 6 | g(t) :=(4 (-85) exp(-86 0.0045 t)-90)/(-85 exp(-86 0.0045 t)-1) |
| | → $g(t) := \frac{340\, e^{-\frac{387}{1000} t} + 90}{85\, e^{-\frac{387}{1000} t} + 1}$ |
| 7 | Grenseverdi[g, t, inf] |
| | → 90 |
| 8 | g''(t)=0 |
| | Løs: $\left\{ t = \frac{1000}{387} \ln(85) \right\}$ |
| 9 | Numerisk[$8,3] |
| | → $\{t = 11.5\}$ |
| 10 | g'(11.5) |
| | ≈ 8.32 |

Vi definerer den spesielle løsningen som g(t), der C og k har fått numeriske verdier.
g(t) vil da bli vist i grafdelen.
Grenseverdien er bærekraften 90.

d) Størst vekst i vendepunktet, som vi finner i linje 8,9 og 10:
8.3 ulvepar/år

e) Regner med samme $k = 0.0045$ og definerer ny funksjon $h(t)$.
Bestemmer deretter integrasjonskonstanten med $h(0) = 3$ og lager en ny spesiell løsning $i(x)$:

| | |
|---|---|
| 11 | h(t):=(4 C exp(-86 0.0045 t)-90)/(C exp(-86 0.0045 t)-1) |
| | → $h(t) := \frac{4\, C\, e^{-\frac{387}{1000} t} - 90}{C\, e^{-\frac{387}{1000} t} - 1}$ |
| 12 | h(0)=3 |
| | NLøs: $\{C = 87\}$ |
| 13 | i(t):=(4 87 exp(-86 0.0045 t)-90)/(87 exp(-85 0.0045 t)-1) |
| | → $i(t) := \frac{348\, e^{-\frac{387}{1000} t} - 90}{87\, e^{-\frac{153}{400} t} - 1}$ |
| 14 | i(t)=0 |
| | NLøs: $\{t = 3.495\}$ |

Bestanden dør altså ut etter ca. 3.5 år.

## Oppgave 4

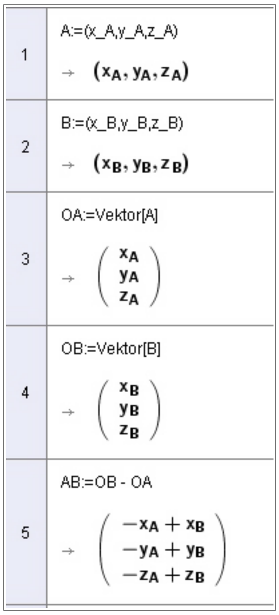
Vi skal bruke CAS til å gjøre de omstendelige beregningene som beviser koordinatformlene for skalarprodukt og vektorprodukt.
a)
Uten tap av generalitet lager vi to vektorer u og v fra Origo til $A = (x_A, y_A, z_A)$ og $B = (x_B, y_B, z_B)$.

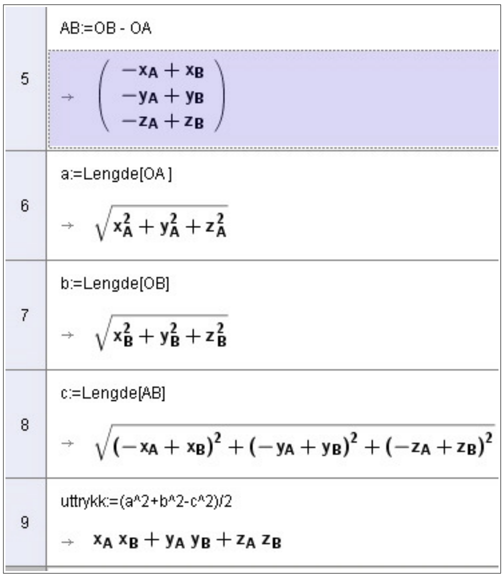
Definer vi $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ og $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, kan vi med hjelp av cosinus-setningen skrive:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a\, b \cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

der $a$, $b$ og $c$ er lengdene av henholdsvis $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ og $\overrightarrow{BC}$.

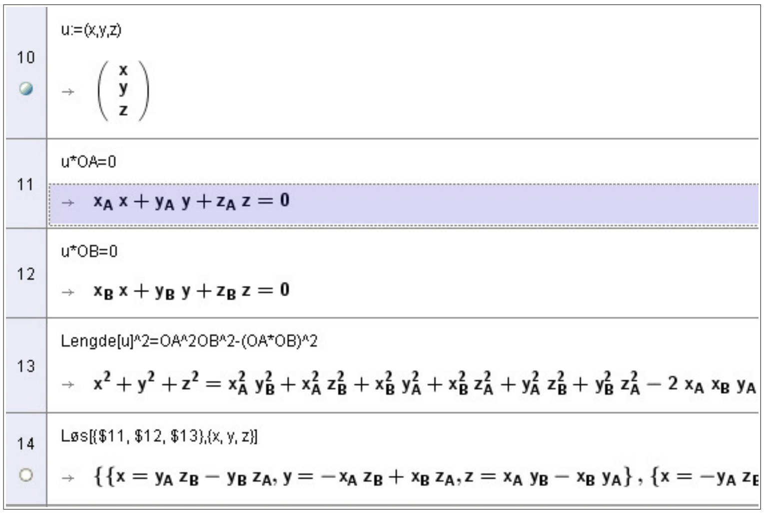
Bruk CAS til å regne ut $\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$ uttrykt ved koordinatene til $A$ og $B$, og vis at dette gir koordinatformelen for skalarproduktet.




b)

Vektorproduktet $\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b}$ er definert av at w skal stå normalt på $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
I tillegg skal lengden være lik $|\vec{u}| = ab\sin\alpha$.
Definer $\vec{u}$ som $[x, y, z]$, og bruk betingelsene over til å vise koordinatformelen for vektorproduktet.
Hvorfor får vi to løsninger her?




Burde sagt at jeg unngår bruken av $\sin\alpha$ i betingelsen ved å bruke arealformelen $\sqrt{\overrightarrow{OA}^2\overrightarrow{OB}^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2}$ istedenfor $ab\sin\alpha$ i tredje betingelse.
Se også neste oppgave hvor denne bevises.
(Går an å bruke vinkel men GeoGebra klarer ikke de store utregningene som dette resulterer i, dessverre...)
Får to løsninger, på grunn av at betingelsen er gitt med tallverdi, slik at vi får både $\vec{u} = [x, y, z]$ og $[-x, -y, -z]$.

# Oppgave 5

a) Bruk definisjonene av vektor- og skalarprodukt til å bevise at:
$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$.

b) Gitt punktene $O = (0,0,0)$, $A = (a,0,0)$, $B = (0,b,0)$ og $C = (0,0,c)$.
Bruk CAS til å bevise denne sammenhengen mellom arealene:
$A_{OAB}^2 + A_{OAC}^2 + A_{OBC}^2 = A_{ABC}^2$
(Tips: Bruk arealformelen som følger av oppgave a: $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$.)

c) Bruk CAS til å vise at normalvektoren til planet $\alpha$ gjennom $A$, $B$ og $C$ blir
$\vec{n} = [bc, ac, ab]$

d) Bruk CAS til å vise at ligningen til $\alpha$ kan skrives $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

e) Bruk CAS til å finne avstanden fra $\alpha$ til Origo.

a)

| | |
|---|---|
| 1 | u:=(x_u,y_u,z_u)<br>→ $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ |
| 2 | v:=(x_v,y_v,z_v)<br>→ $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ |
| 3 | VS:=\|u⊗v\|^2+(u*v)^2<br>→ $x_u^2 x_v^2 + x_u^2 y_v^2 + x_u^2 z_v^2 + x_v^2 y_u^2 + x_v^2 z_u^2 + y_u^2 y_v^2 + y_u^2 z_v^2 + y_v^2 z_u^2 + z_u^2 z_v^2$ |
| 4 | HS:=u^2v^2<br>→ $x_u^2 x_v^2 + x_u^2 y_v^2 + x_u^2 z_v^2 + x_v^2 y_u^2 + x_v^2 z_u^2 + y_u^2 y_v^2 + y_u^2 z_v^2 + y_v^2 z_u^2 + z_u^2 z_v^2$ |
| 5 | VS-HS<br>→ 0 |

b)

| | | |
|---|---|---|
| 6 | O:=(0,0,0) | $\rightarrow \ (0,0,0)$ |
| 7 | A:=(a,0,0) | $\rightarrow \ (a,0,0)$ |
| 8 | B:=(0,b,0) | $\rightarrow \ (0,b,0)$ |
| 9 | C:=(0,0,c) | $\rightarrow \ (0,0,c)$ |
| 10 | OA:=Vektor[O,A] | $\rightarrow \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| 11 | OB:=Vektor[O,B] | $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| 12 | OC:=Vektor[O,C] | $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ |
| 13 | AB:=Vektor[A,B] | $\rightarrow \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| 14 | AC:=Vektor[A,C] | $\rightarrow \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ |
| 15 | A_{OAB}:=sqrt(OA^2OB^2-(OA*OB)^2)/2 | $\rightarrow \frac{1}{2} \ \lvert a \rvert \ \lvert b \rvert$ |
| 16 | A_{OAC}:=sqrt(OA^2OC^2-(OA*OC)^2)/2 | $\rightarrow \frac{1}{2} \ \lvert a \rvert \ \lvert c \rvert$ |

| | | |
|---|---|---|
| 16 | A_{OAC}:=sqrt(OA^2OC^2-(OA*OC)^2)/2 | $\rightarrow \frac{1}{2} \ \lvert a \rvert \ \lvert c \rvert$ |
| 17 | A_{OBC}:=sqrt(OB^2OC^2-(OB*OC)^2)/2 | $\rightarrow \frac{1}{2} \ \lvert b \rvert \ \lvert c \rvert$ |
| 18 | A_{ABC}:=sqrt(AB^2AC^2-(AB*AC)^2)/2 | $\rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$ |
| 19 | $15² + $16² + $17² | $\rightarrow \frac{1}{4} a^2 b^2 + \frac{1}{4} a^2 c^2 + \frac{1}{4} b^2 c^2$ |
| 20 | $18² | $\rightarrow \frac{1}{4} \left(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2\right)$ |

c)

| | |
|---|---|
| 21 | n:=AB⊗AC<br>$\rightarrow \begin{pmatrix} b\ c \\ a\ c \\ a\ b \end{pmatrix}$ |
| 22 | (x-a,y,z)*n=0<br>$\rightarrow -a\ b\ c + a\ b\ z + a\ c\ y + b\ c\ x = 0$ |
| 23 | d) Divisjon med abc gir ønsket svar i linjen over |
| 24 | e) Projiserer vektor fra punkt i planet (A) til Origo ned på normalvektoren: |
| 25 | abs(Vektor[A,O]*n/\|n\|)<br>$\rightarrow \lvert a\rvert\ \lvert b\rvert\ \frac{\lvert c\rvert}{\sqrt{\lvert a^2\ b^2 + a^2\ c^2 + b^2\ c^2\rvert}}$ |
| 26 | Eller med arealformelen: |
| 27 | abs((0+0+0-abc)/\|n\|)<br>$\rightarrow \frac{\lvert abc\rvert}{\sqrt{\lvert a^2\ b^2 + a^2\ c^2 + b^2\ c^2\rvert}}$ |