Løsningsforslag, utvalgte oppgaver fra kapittel 5.4

15. februar 2011

551 d)

Vi setter $u = x^2 + 3x + 4$, hvilket gir $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x + 3$ og $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x+3}$. Vi utfører variabelskiftet i integralet og får

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,\mathrm{d}x &= \\ \int \frac{2x+3}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2x+3} &= \\ \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u &= \\ \ln|u| + C &= \\ \ln\left(x^2+3x+4\right) + C\end{aligned}$$

Vi trenger ikke absoluttverditegn rundt $x^2 + 3x + 4$, fordi dette alltid er positivt.

554

(a) Vi viser likheten ved å sette de to brøkene på høyre side på samme brøkstrek. Fellesnevneren er $(x-1)(x-3)$.

$$\frac{1\cdot(x-3)}{(x-1)(x-3)} + \frac{2\cdot(x-1)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x-3+2x-2}{(x-1)(x-3)} = \frac{3x-5}{(x-1)(x-3)}$$

(b) Vi benytter likheten fra (a) til å regne ut integralet.

$$\int \frac{3x-5}{(x-1)(x-3)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}\right)\mathrm{d}x = \ln|x-1| + 2\ln|x-3| + C$$

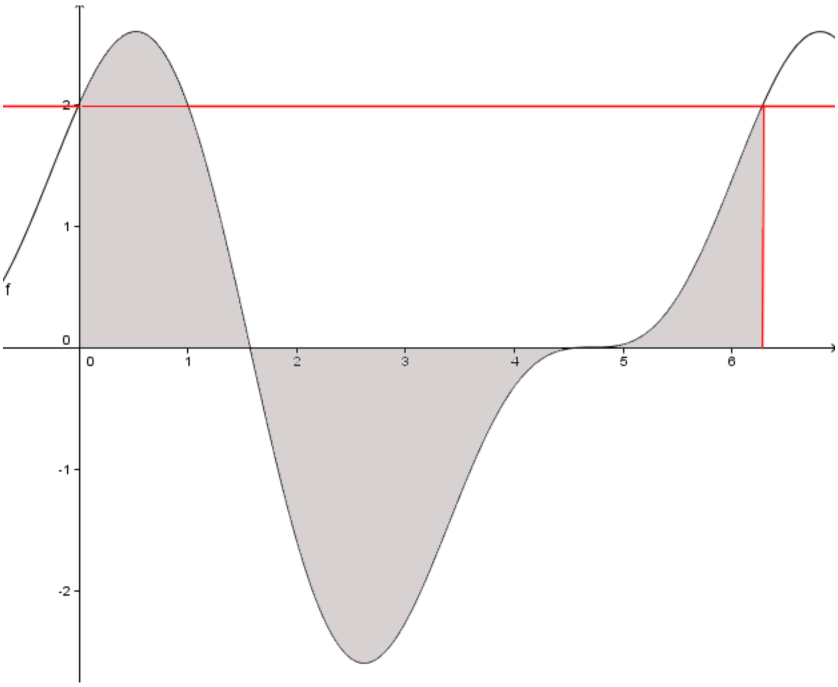
560

Vi substituerer $u = \tan x$, og får $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos^2 x}$. Dette gir $\mathrm{d}x = \cos^2 x\,\mathrm{d}u$. Setter inn i integralet og får

$$\int 2\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int 2u \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\cos^2 x\,\mathrm{d}u = \int 2u\,\mathrm{d}u = 2\cdot\frac{1}{2}u^2 + C = \tan^2 x + C$$

561

Vi tegner funksjonen $f(x) = 2\cos x(1+\sin x)$, $D_f = [0, 2\pi\rangle$.



Vi ser at arealet avgrenset av $f(x)$ og x-aksen er satt sammen av flere deler, og en av delene ligger under x-aksen. Vi må finne nullpunktene til $f(x)$ og integrere hver av de tre delene for seg. Alternativt kan vi se at summen av de to delene som ligger over x-aksen er lik den delen som ligger under (det er dette vi har gjort under).

$$f(x) = 0 \implies \cos x = 0 \vee \sin x = -1$$
$$x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$$

Vi har funnet de to nullpunktene: $x = \frac{\pi}{2}$ og $x = \frac{3\pi}{2}$. For å beregne integralet setter vi $u = 1 + \sin x$, som gir $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos x$ og $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\cos x}$. Dette gir det ubestemte integralet

$$\int 2\cos x(1+\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\int \cos x \cdot u\,\frac{\mathrm{d}u}{\cos x} = 2\int u\,\mathrm{d}u = 2\cdot\frac{1}{2}u^2 + C = (1+\sin x)^2 + C$$

Vi beregner arealet over x-aksen og ganger med 2 for å finne hele arealet.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = [(1+\sin x)^2]_0^{\frac{\pi}{2}} = (1+\sin\frac{\pi}{2})^2 - (1+\sin 0)^2 = (1+1)^2 - (1+0)^2 = 4-1 = 3$$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = [(1+\sin x)^2]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = (1-0)^2 - (1-1)^2 = 1$$

Det vil si at det totalte arealet blir $A = 2(3+1) = 8$.

562

(a) Vi får at $\frac{x^4+3x-1}{x^2-3x} = x^2 + 3x + 9 + \frac{30x-1}{x^2-3x}$.

(b) Vi må bruke delbrøkoppspalting på $\frac{30x-1}{x^2-3x}$ og får (siden $x^2 - 3x = x(x-3)$):

$$\begin{aligned}\frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} &= \frac{30x-1}{x(x-3)} \\ \frac{A(x-3)}{x(x-3)} + \frac{Bx}{x(x-3)} &= \frac{30x-1}{x(x-3)} \\ A(x-3) + Bx &= 30x - 1\end{aligned}$$

Vi setter inn $x = 0$ og får $-3A = -1 \implies A = \frac{1}{3}$. Vi setter inn $x = 3$ og får $3B = 89 \implies B = \frac{89}{3}$. Vi skriver om på det opprinnelige integralet og løser det:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 + 3x - 1}{x^2 - 3x}\,dx &= \\ \int (x^2 + 3x + 9 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{89}{3}\cdot\frac{1}{x-3})\,dx &= \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x + \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{89}{3}\ln|x-3| + C\end{aligned}$$

563

(a) Vi ser at vi ikke trenger å bruke delbrøkoppspalting – variabelskifte kan benyttes. Vi setter $u = x^2 - 4$, som gir integralet

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2-4}\,dx &= \\ \int_{x=-1}^{x=1} \frac{1}{u}\,du &= \\ [\ln|x^2-4|]_{-1}^{1} &= \\ \ln|1-4| - \ln|1-4| &= 0\end{aligned}$$

Merk at vi presiserer at grensene er oppgitt med x som variabel der vi har byttet integrasjonsvariabel til u.

(b) Denne gangen må delbrøkoppspalting benyttes. Vi ser at nevneren faktoriserer til $x(x+1)$.

$$\begin{aligned}\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} &= \frac{x-1}{x(x+1)} \\ \frac{Ax}{x(x+1)} + \frac{B(x+1)}{x(x+1)} &= \frac{x-1}{x(x+1)} \\ Ax + B(x+1) &= x - 1\end{aligned}$$

Vi setter inn $x = 0$ og får $B = -1$. Vi setter inn $x = -1$ og får $A = 2$. Da kan vi skrive om integralet. Merk at både i denne og de neste oppgavene er det innsettingen av verdier i den antideriverte som kan by på problemer – her gjelder det å holde tunga rett i munnen, og være obs på fortegn og logaritmeregler ...

$$
\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{x-1}{x^2+x}\,dx &= \\
\int_1^3 \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x}\right) dx &= \\
[2\ln|x+1| - \ln|x|]_1^3 &= \\
2\ln 4 - \ln 3 - 2\ln 2 + \ln 1 &= \\
4\ln 2 - \ln 3 - 2\ln 2 + 0 &= \\
2\ln 2 - \ln 3
\end{aligned}
$$

(c) Her ser vi at telleren og nevneren har samme grad, så vi må bruke polynomdivisjon. Divisjonen er ikke gjengitt her, men vi får at

$$
\frac{2x^2+3x-26}{x^2+2x-8} = 2 - \frac{x+10}{x^2+2x-8}
$$

Den siste brøken må vi bruke delbrøkoppspalting på. Nevneren faktoriserer til $(x-2)(x+4)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4} &= \frac{x+10}{(x-2)(x+4)} \\
\frac{A(x+4)}{(x-2)(x+4)} + \frac{B(x-2)}{(x-2)(x+4)} &= \frac{x+10}{(x-2)(x+4)} \\
A(x+4) + B(x-2) &= x+10
\end{aligned}
$$

Vi setter inn $x = 2$ og får $A = 2$. Vi setter inn $x = -4$ og får $B = -1$. Integralet kan nå skrives om til

$$
\begin{aligned}
\int_3^5 \frac{2x^2+3x-26}{x^2+2x-8}\,dx &= \\
\int_3^5 \left(2 - \frac{2}{(x-2)} + \frac{1}{(x+4)}\right) dx &= \\
[2x - 2\ln|x-2| + \ln|x+4|]_3^5 &= \\
2\cdot 5 - 2\ln 3 + \ln 9 - 2\cdot 3 + 2\ln 1 - \ln 7 &= \\
10 - 2\ln 3 + 2\ln 3 - 6 + 0 - \ln 7 &= \\
4 - \ln 7
\end{aligned}
$$

(d) Igjen må vi bruke først polynomdivisjon og deretter delbrøkoppspalting. Polynomdivisjon gir

$$
\frac{x^3-4x+1}{x^2-1} = x + \frac{1-3x}{x^2-1}
$$

Delbrøkoppspalting gir

$$
\frac{1-3x}{x^2-1} = \frac{-1}{x-1} - \frac{2}{x+1}
$$

Dette gir oss et mye enklere integral enn utgangspunktet!

$$
\begin{aligned}
\int_{-4}^{-2} \frac{x^3 - 4x + 1}{x^2 - 1}\, dx &= \\
\int_{-4}^{-2} (x - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1})\, dx &= \\
[\frac{1}{2}x^2 - \ln|x-1| - 2\ln|x+1|]_{-4}^{-2} &= \\
\frac{1}{2}(-2)^2 - \ln|-3| - 2\ln|-1| - \frac{1}{2}(-4)^2 + \ln|-5| + 2\ln|-3| &= \\
2 - \ln 3 - 0 - 8 + \ln 5 + 2\ln 3 &= \\
-6 + \ln 3 + \ln 5 &= \\
-6 + \ln(3 \cdot 5) &= \\
\ln 15 - 6 &
\end{aligned}
$$