Utdanningsdirektoratet

Eksamen

30.11.2010

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser reknedugleik og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (16 poeng)

a) Deriver funksjonane

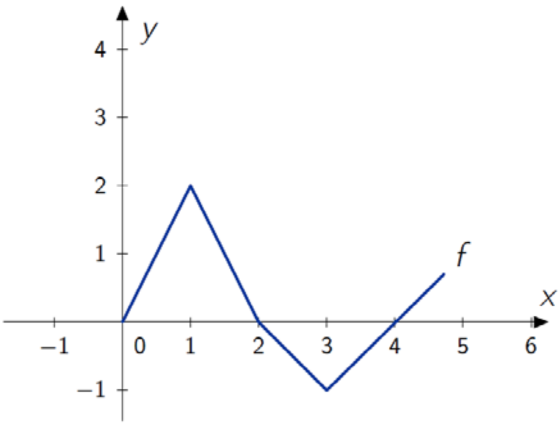
1) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

2) $g(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

b) Bestem integrala

1) $\int \frac{x}{x^2 + 3} \mathrm{d}x$

2) $\int_0^3 f(x) \mathrm{d}x$ der figuren nedanfor viser grafen til *f*.



c) Løys differensiallikninga:

$y' - 2y^2 = 0$ når $y(0) = \frac{1}{2}$

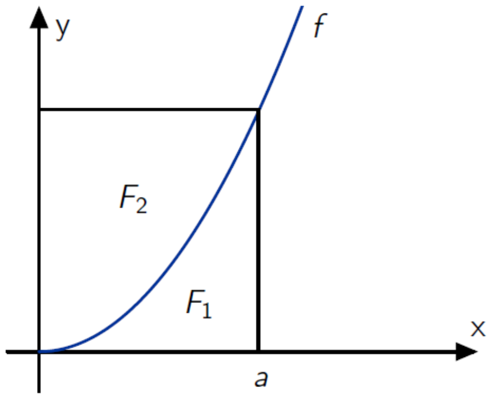
d) Gitt punkta $A(1, 0, 3)$, $B(3, 2, 4)$ og $C(5, 3, 0)$

1) Bestem $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ og $\left|\overrightarrow{AC}\right|$

2) Bestem $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

3) Vis at $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|^2+\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$

Oppgåve 2 (8 poeng)



Vi har funksjonen $f(x)=x^2$

a) Bestem arealet F_1 avgrensa av grafen til f, førsteaksen og linja $x=a$ der $a>0$.

Rektangelet på skissa ovanfor kan delast i to område med areala F_1 og F_2

b) Vis at $\dfrac{F_2}{F_1}=2$

Vi skal no sjå på funksjonen $g(x)=x^n$, der n er eit naturleg tal. Eit tilsvarande rektangel som det ovanfor med funksjonen g kan også delast i to område med areala G_1 og G_2.

c) Forklar at $G_1=\dfrac{1}{n+1}\cdot a^{n+1}$

d) Bestem $\dfrac{G_2}{G_1}$

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 3 (14 poeng)

a) Ei rekkje er gitt ved

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$$

Forklar at rekkja er aritmetisk, og bruk dette til å vise at $S_n = n^2$

b) Vi skal no sjå på ei anna rekkje

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}$$

1) Finn eit uttrykk for S_n.
Finn ved rekning kor mange ledd vi minst må ha med for at $S_n > 1,45$

2) Vi lèt no talet på ledd gå mot uendeleg. Bestem summen av rekkja dersom han finst.

c) Vi ser på ei uendeleg geometrisk rekkje med variabel kvotient

$$S(x) = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \cdots$$

1) Bestem konvergensområdet til rekkja. Finn eit uttrykk for $S(x)$.

2) Løys likningane $S(x) = 4$ og $S(x) = -2$

d) Bevis formelen $1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n \cdot (n+1)(n+2)}{6}$ ved induksjon.

Oppgåve 4 (12 poeng)

Du skal svare på anten alternativ I eller alternativ II.
Dei to alternativa tel like mykje ved vurderinga.

(Dersom svaret ditt inneheld delar av begge alternativa, vil berre det du har skrive på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ 1

Den periodiske funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2\sin x + 2\sin x \cdot \cos x\ , \quad x \in \langle 0,\ 4\pi \rangle$$

a) Teikne grafen til f. Bestem perioden.

b) Finn nullpunkta til f ved rekning.

c) Vis ved rekning at

$$f'(x) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$$

Bruk $f'(x)$ til å bestemme topp- og botnpunkt på grafen til f.

d) Finn $f''(x)$ ved rekning. Bruk $f''(x)$ til å bestemme eventuelle vendepunkt på grafen til f i intervallet $x \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$

e) Bestem ved rekning arealet av det flatestykket som er avgrensa av grafen til f, førsteaksen og linjene $x = 0$ og $x = \pi$

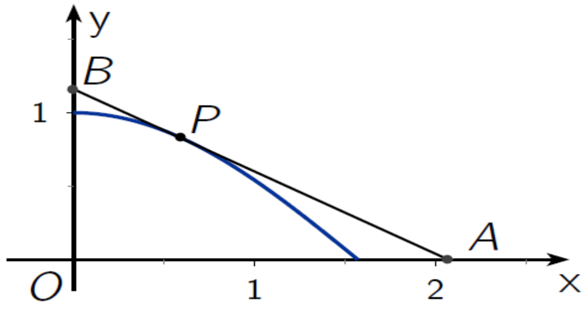
Alternativ 2

Vi har teikna grafen til

$$f(x) = \cos x$$

og ein tangent til denne i punktet $P\big(a, f(a)\big)$.

Skjeringspunkta mellom tangenten og koordinataksane er A og B. Sjå skissa til høgre.



a) Vis at likninga for tangenten er

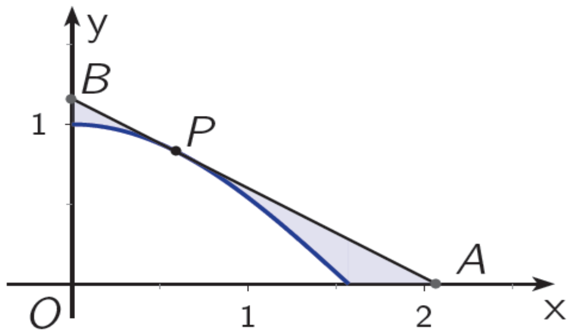
$$y = -(\sin a) \cdot x + a \cdot \sin a + \cos a$$

b) Bestem koordinatane til punkta A og B.
Vis at arealet av $\triangle OAB$ er

$$F_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}(a \cdot \sin a + \cos a) \cdot \left(a + \frac{\cos a}{\sin a}\right)$$

c) Forklar at arealet T av det fargelagde området på skissa til høgre kan skrivast

$$T(a) = F_{\triangle OAB} - 1$$



d) Teikne grafen til T når $a \in \left\langle \frac{1}{5}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

e) Bestem $T_{\min}$ med tilhøyrande verdi av a. Finn ut kva som skjer med arealet av det fargelagde området når $a \to \frac{\pi}{2}$

Oppgåve 5 (10 poeng)

I 2008 var innvandringa til Noreg 1,4 % av folketalet y, mens utvandringa var 0,5 % av y. Dette året blei det født 60 000, mens talet på døde var 42 000.

Vi går ut frå at desse dataa for befolkningsendringa held seg konstant nokre år. Vi lèt innbyggjartalet i Noreg vere $y(t)$, der t er åra etter 1. januar 2009. Det vil seie at $y(0)$ er folketalet i byrjinga av 2009, $y(1)$ er folketalet i byrjinga av 2010, og så vidare.

a) Forklar at befolkningsendringa kan beskrivast ved differensiallikninga

$$y' = 0{,}009 \cdot y + 18\,000$$

b) Bestem folketalet det året befolkninga veks med 72 000.

c) Finn den generelle løysinga av differensiallikninga ved rekning.

d) Folketalet i Noreg 1. januar 2009 var 4 800 000. Bestem konstanten i løysinga av differensiallikninga.

e) Kor lang tid vil det ta, ifølgje modellen ovanfor, før innbyggjartalet i Noreg er 6 000 000?

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (16 poeng)

a) Deriver funksjonene

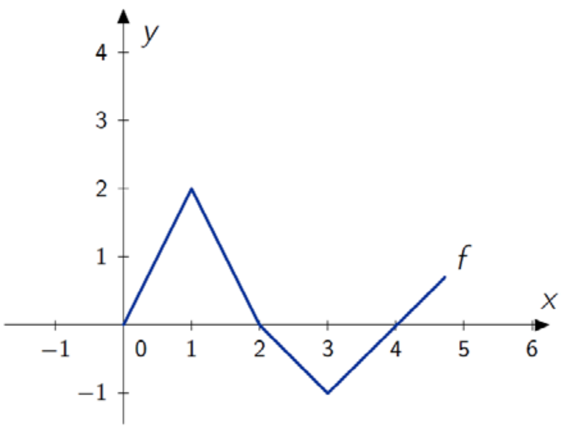
1) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

2) $g(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

b) Bestem integralene

1) $\int \frac{x}{x^2+3}\,dx$

2) $\int_0^3 f(x)\,dx$ der figuren nedenfor viser grafen til *f*.



c) Løs differensiallikningen:

$$y' - 2y^2 = 0 \quad \text{når} \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

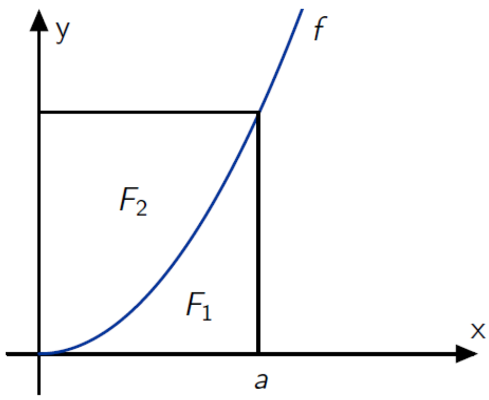
d) Gitt punktene $A(1, 0, 3)$, $B(3, 2, 4)$ og $C(5, 3, 0)$

1) Bestem $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ og $\left|\overrightarrow{AC}\right|$

2) Bestem $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

3) Vis at $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|^2+\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$

Oppgave 2 (8 poeng)



Vi har funksjonen $f(x)=x^2$

a) Bestem arealet F_1 avgrenset av grafen til f, førsteaksen og linjen $x=a$ der $a>0$.

Rektangelet på skissen ovenfor kan deles i to områder med arealene F_1 og F_2

b) Vis at $\dfrac{F_2}{F_1}=2$

Vi skal nå se på funksjonen $g(x)=x^n$, der n er et naturlig tall. Et tilsvarende rektangel som det ovenfor med funksjonen g kan også deles i to områder med arealene G_1 og G_2.

c) Forklar at $G_1=\dfrac{1}{n+1}\cdot a^{n+1}$

d) Bestem $\dfrac{G_2}{G_1}$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 3 (14 poeng)

a) En rekke er gitt ved

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$$

Forklar at rekken er aritmetisk, og bruk dette til å vise at $S_n = n^2$

b) Vi skal nå se på en annen rekke

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}$$

1) Finn et uttrykk for S_n.
Finn ved regning hvor mange ledd vi minst må ha med for at $S_n > 1{,}45$

2) Vi lar nå antall ledd gå mot uendelig. Bestem rekkens sum dersom den finnes.

c) Vi ser på en uendelig geometrisk rekke med variabel kvotient

$$S(x) = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \cdots$$

1) Bestem konvergensområdet til rekken. Finn et uttrykk for $S(x)$.

2) Løs likningene $S(x) = 4$ og $S(x) = -2$

d) Bevis formelen $1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n \cdot (n+1)(n+2)}{6}$ ved induksjon.

Oppgave 4 (12 poeng)

Du skal svare på enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene teller like mye ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen din inneholder deler av begge alternativene, vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ 1

Den periodiske funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2\sin x + 2\sin x \cdot \cos x \ , \qquad x \in \langle 0,\ 4\pi \rangle$$

a) Tegn grafen til f. Bestem perioden.

b) Finn nullpunktene til f ved regning.

c) Vis ved regning at

$$f'(x) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$$

Bruk $f'(x)$ til å bestemme topp- og bunnpunkter på grafen til f.

d) Finn $f''(x)$ ved regning. Bruk $f''(x)$ til å bestemme eventuelle vendepunkter på grafen til f i intervallet $x \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$

e) Bestem ved regning arealet av det flatestykket som er avgrenset av grafen til f, førsteaksen og linjene $x = 0$ og $x = \pi$

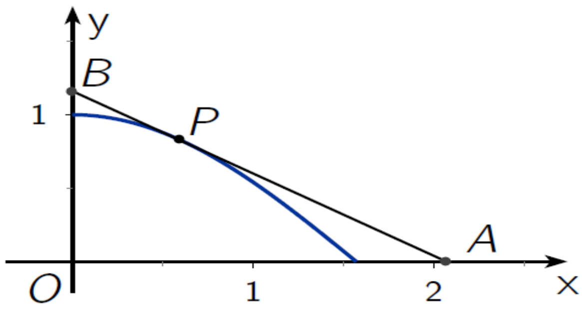
Alternativ 2

Vi har tegnet grafen til

$$f(x) = \cos x$$

og en tangent til denne i punktet $P(a,\, f(a))$.

Skjæringspunktene mellom tangenten og koordinataksene er A og B. Se skissen til høyre.



a) Vis at likningen for tangenten er

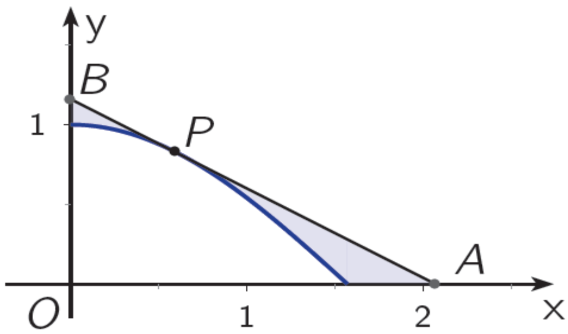
$$y = -(\sin a)\cdot x + a\cdot \sin a + \cos a$$

b) Bestem koordinatene til punktene A og B.
Vis at arealet av $\triangle OAB$ er

$$F_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}(a\cdot \sin a + \cos a)\cdot\left(a + \frac{\cos a}{\sin a}\right)$$

c) Forklar at arealet T av det fargelagte området på skissen til høyre kan skrives

$$T(a) = F_{\triangle OAB} - 1$$



d) Tegn grafen til T når $a \in \left\langle \frac{1}{5},\, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

e) Bestem T_{min} med tilhørende verdi av a. Finn ut hva som skjer med arealet av det fargelagte området når $a \to \frac{\pi}{2}$

Oppgave 5 (10 poeng)

I 2008 var innvandringen til Norge $1,4\ \%$ av folketallet y, mens utvandringen var 0,5 % av y. Dette året ble det født 60 000, mens antall døde var 42 000.

Vi antar at disse dataene for befolkningsendringen holder seg konstant noen år. Vi lar innbyggertallet i Norge være $y(t)$, der t er antall år etter 1. januar 2009. Det vil si at $y(0)$ er folketallet i begynnelsen av 2009, $y(1)$ er folketallet i begynnelsen av 2010, og så videre.

a) Forklar at befolkningsendringen kan beskrives ved differensiallikningen

$$y' = 0,009 \cdot y + 18\,000$$

b) Bestem folketallet det året befolkningen vokser med 72 000.

c) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen ved regning.

d) Folketallet i Norge 1. januar 2009 var 4 800 000. Bestem konstanten i løsningen av differensiallikningen.

e) Hvor lang tid vil det ta, ifølge modellen ovenfor, før innbyggertallet i Norge er 6 000 000?

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet