R2 - Trigonometri, funksjoner

13.02.09
Løsningsskisser

I

Løs ligningene:

a) $\sin(3x) - \cos(3x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$

b) $\cos x \cdot \tan x + \cos^2 x \cdot \sin x = 0, \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$

a) $\sin(3x) - \cos(3x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Omformer: $\sqrt{1^2 + 1^2}\, \sin(3x + \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tan\varphi = \frac{-1}{1}, \qquad \varphi \in$ 4 Kvadrant

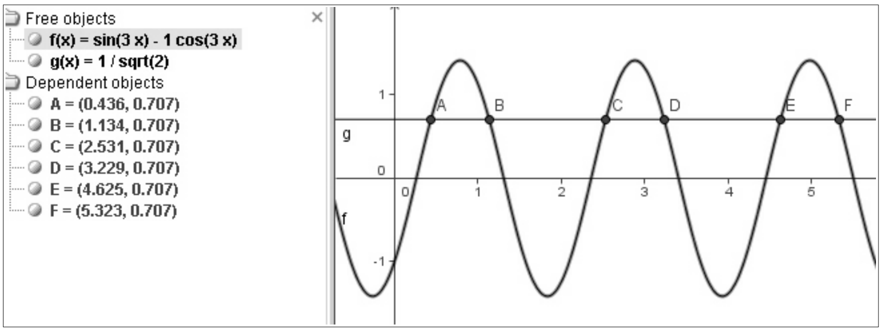
$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \vee\, 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

$x = \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}}{3} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4}}{3} + k\frac{2\pi}{3}$

$x = \frac{5\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{13\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}$

$L = \{\frac{5\pi}{36}, \frac{13\pi}{36}, \frac{29\pi}{36}, \frac{37\pi}{36}, \frac{53\pi}{36}, \frac{61\pi}{36}\}$ $\qquad$ ($L \approx \{0.436, 1.13, 2.53, 3.23, 4.63, 5.32\}$)

Kontroll med lommeregner (her GeoGebra):



b) $\cos x \cdot \tan x + \cos^2 x \cdot \sin x = 0$

$\sin x + (1 - \sin^2 x)\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x + \sin x - \sin^3 x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x - \sin^3 x = 0 \Leftrightarrow$

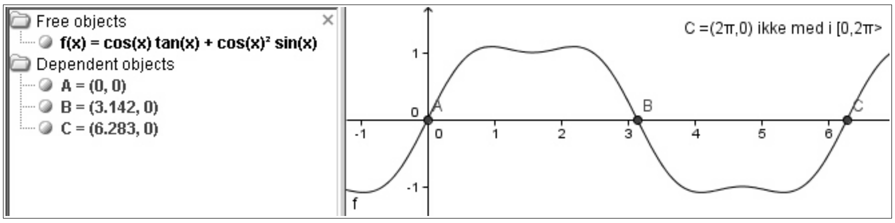
$\sin x(2 - \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ eller $\sin x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$

$L = \{0, \pi\}$

(Egentlig enda enklere, trenger ikke erstatte $\cos^2 x$:

$\sin x + \cos^2 x \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(1 + \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$)

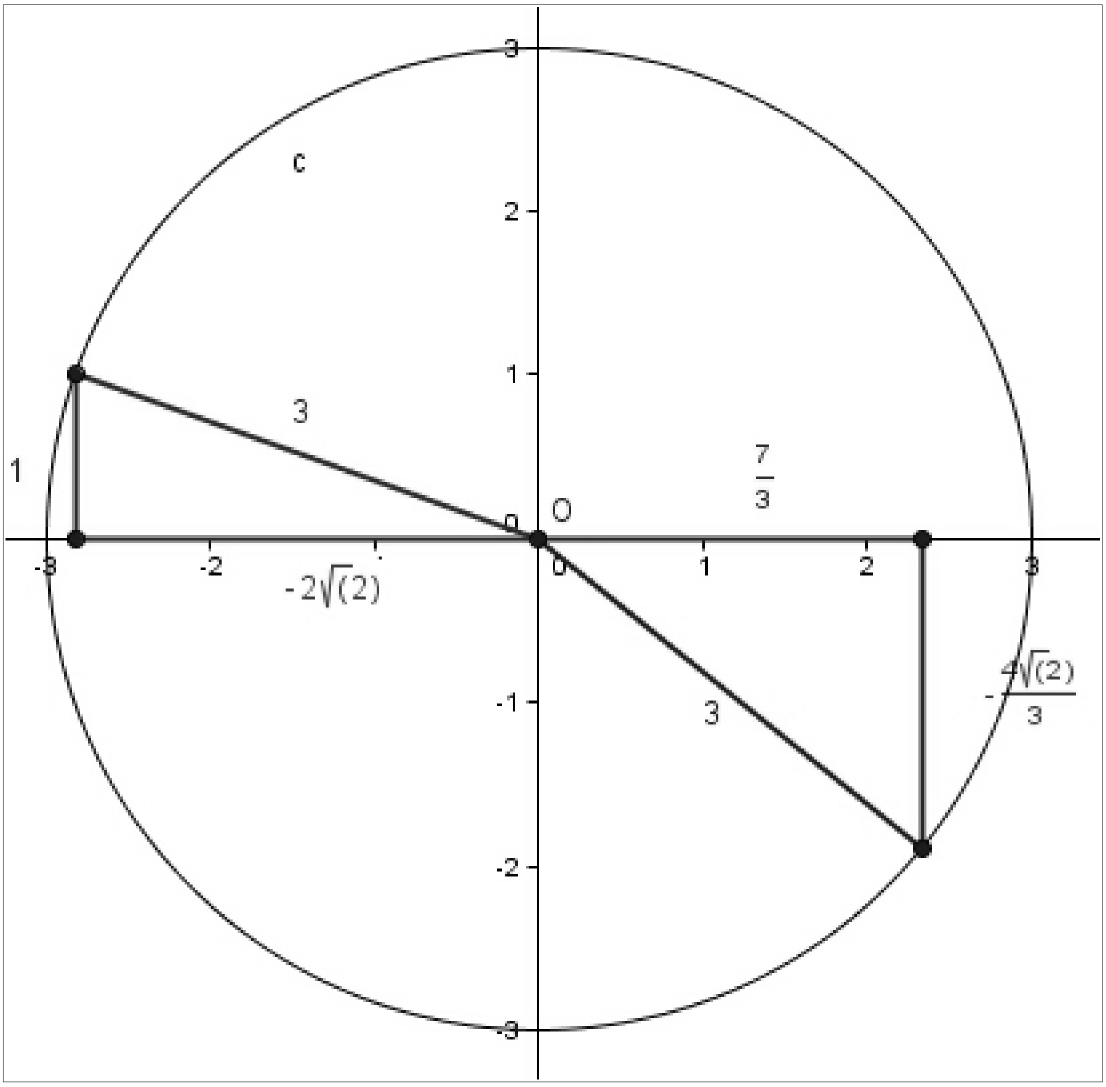
Kontroll med lommeregner (her GeoGebra):



II

Vinkelen u ligger i andre kvadrant og $\sin u = \frac{1}{3}$.
Regn ut eksakte verdier for:
a) $\cos u$ b) $\tan u$ c) $\sin 2u$ d) $\tan 2u$

Tegn en sirkel og bruk Pythagoras og omregningsformler for dobbelt vinkel:
a) $\cos u = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $\tan u = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$
c) $\sin 2u = 2\sin u \cos u = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\frac{2\sqrt{2}}{3}) = -\frac{4}{9}\sqrt{2}$
d) $\tan 2u = \frac{2\tan u}{1-\tan^2 u} = \frac{2(-\frac{1}{2\sqrt{2}})}{1-(-\frac{1}{2\sqrt{2}})^2} = -\frac{4}{7}\sqrt{2}$
Figur:



III

Tabellen nedenfor gir en oversikt over gjennomsnittlig antall soltimer hver måned i Oslo. S er her antall soltimer i måned nr. x.

x [måned]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S [timer]	40.5	76.0	126.0	178.0	220.2	249.6	245.8	215.8	144.3	86.4	51.2	35.2

a) Finn ved regning a, b, c og d slik at funksjonen $S(x) = a + b\sin(cx + d)$ passer best mulig med verdiene i tabellen.
Tenk på den kontinuerlige kurven som antall soltimer i løpet av 30 dager, hvor x ligger midt i

disse 30 dagene.
b) Finn ved regning når antall soltimer i en 30-dagers periode er minst.
c) Finn ved regning når antall soltimer i en 30-dagers periode er lik verdien du fant for a.
d) Sett opp en ligning som bestemmer når antall soltimer i en 30-dagers periode er lik 200. (Ikke løs ligningen.)
Finn svaret grafisk ved hjelp av lommeregner.
e) Finn $S(x)$ ved hjelp av regresjon på lommeregneren.

a) $a = \frac{\text{maks+min}}{2} = \frac{249.6+35.2}{2} = 142.4$
$b = \frac{\text{maks-min}}{2} = \frac{249.6-35.2}{2} = 107.2$
$c = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} = 0.524$
Bruker skjæring med likevektslinje, ca.
$\phi = \frac{d}{c} = 3.3 \Leftrightarrow d = 3.3 \cdot c = 3.3 \cdot \frac{\pi}{6} = 1.73$
):
$S(x) = 142 + 107\sin(0.524x - 1.73)$

(Alternativt bruke makspunkt: $\sin(0.524 \cdot 6 + d) = 1 \Leftrightarrow$
$3.144 + d = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow -1.57 + k2\pi$
$) : d = -1.57$
(Maks for 6.3 gir -1.73)
)

b) Minimum når: $\sin(0.524x - 1.73) = -1 \Leftrightarrow 0.524x - 1.73 = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow$
$x = \frac{\frac{3\pi}{2}+1.73}{0.524} + k\frac{2\pi}{0.524} = 12.3 + k12$
):
S minimum når $x = 12.3$ (ca. 24 des (Med x =12 midt i måneden.))

c) Krysser likevektslinjen når: $\sin(0.524x - 1.73) = 0 \Leftrightarrow$
$0.524x - 1.73 = 0 + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1.73}{0.524} + k\frac{\pi}{0.524} = 3.30 + k6$
):
$x = 3.3$ (ca. 24 mars) eller $x = 9.3$ (ca. 24 september)

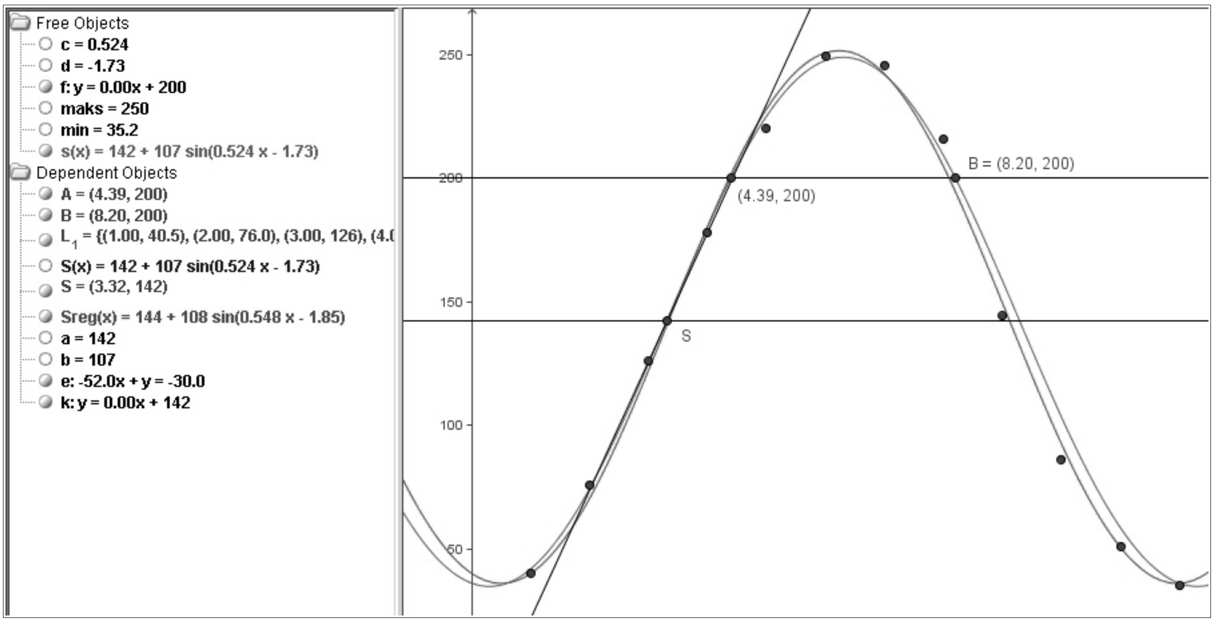
d) $142 + 107\sin(0.524x - 1.73) = 200 \Leftrightarrow 107\sin(0.524x - 1.73) = 58$

Lommeregner:
Y1=142+107*sin(0.524*X-1.73)
Y2=200
CALC,intersect

$x = 4.39$ (ca. 27 april) eller $x = 8.17$ (ca. 21 august)

e) Legger tabell i L1 og L2
STAT, CALC, SinReg L1,L2 gir:

$S(x) = 143 + 108\sin(0.548x - 1.85)$
Kontroll med lommeregner: (Her GeoGebra.)



IV

Gitt funksjonen $f(x) = e^{-5x}\sin x, \qquad x \in [-4, 4]$

a) Finn funksjonens nullpunkter ved regning.

b) Finn funksjonens ekstremalpunkter ved hjelp av lommeregner

c) Finn funksjonens vendepunkter ved regning.

(Obs: For kontroll på lommeregner må du her blåse opp y-aksen betraktelig...)

a)

Nullpunkter: $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-5x}\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$

$L = \{-\pi, 0, \pi\}$

b) Ekstremalpunkter:

Y1=e ^(-5X)*sin(X)

CALC, maximum eller minimum gir:

$TP = (0.1977, 0.0731), (-4, 3.67 \cdot 10^{8}), (4, -1.56 \cdot 10^{-9})$

$BP = (-2.94, -485000), (3.34, -1.1 \cdot 10^{-8})$

c) Vendepunkter:

Produktregel gir:

$f'(x) = -5e^{-5x}\sin x + e^{-5x}\cos x = e^{-5x}(-5\sin x + \cos x)$

$f''(x) = -5e^{-5x}(-5\sin x + \cos x) + e^{-5x}(-5\cos x - \sin x) =$

$e^{-5x}(25\sin x - 5\cos x - 5\cos x - \sin x) = e^{-5x}(24\sin x - 10\cos x)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 24\sin x - 10\cos x = 0 \Leftrightarrow 12\sin x - 5\cos x = 0 \Leftrightarrow$

$13\sin(x - 0.395) = 0 \Leftrightarrow x - 0.395 = 0 + k\pi \Leftrightarrow$

$x = 0.395 + k\pi$

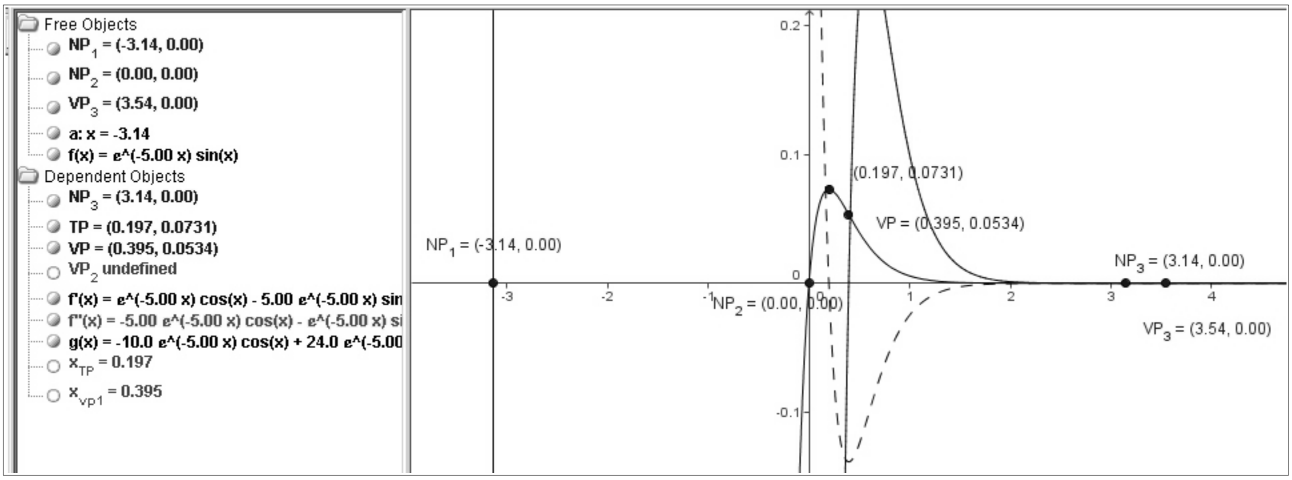
):

$VP_1 = (-2.75, -354000)$

$VP_2 = (0.395, 0.0534)$

$VP_3 = (3.54, -8.05 \cdot 10^{-9})$

Kontroll med lommeregner: (Her GeoGebra.)


Free Objects
NP1 = (-3.14, 0.00)
NP2 = (0.00, 0.00)
VP3 = (3.54, 0.00)
a: x = -3.14
f(x) = e^(-5.00 x) sin(x)
Dependent Objects
NP3 = (3.14, 0.00)
TP = (0.197, 0.0731)
VP = (0.395, 0.0534)
VP2 undefined
f'(x) = e^(-5.00 x) cos(x) - 5.00 e^(-5.00 x) sin
f''(x) = -5.00 e^(-5.00 x) cos(x) - e^(-5.00 x) si
g(x) = -10.0 e^(-5.00 x) cos(x) + 24.0 e^(-5.00
xTP = 0.197
xvp1 = 0.395
(0.197, 0.0731)
VP = (0.395, 0.0534)
NP1 = (-3.14, 0.00)
NP2 = (0.00, 0.00)
NP3 = (3.14, 0.00)
VP3 = (3.54, 0.00)