Prøve R2 - Vektorer

Kapittel 1.1 - 1.3
10.09.10
Løsningsskisser

I

Gitt vektorene $\vec{u} = [2,1,-3]$ og $[1,2,4]$.
Regn ut:
a) $\vec{u} - \vec{v}$ b) $-2\vec{u}$ c) $2\vec{u} - 3\vec{v}$ d) $|\vec{v}|$ e) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ f) $\vec{u} \times \vec{v}$ g) Vinkelen $\angle \vec{u}, \vec{v}$
h) Areal av parallellogram utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Oppgave I krever lavt kompetansenivå:
Grunnleggende regneregler og formler, innsettingsoppgaver og standardmetoder.

a) $\vec{u} - \vec{v} = [2-1, 1-2, -3-4] = [1,-1,-7]$
b) $-2\vec{u} = -2[2,1,-3] = [-2 \cdot 2, -2 \cdot 1, -2 \cdot -3] = [-4,-2,6]$
c) $2\vec{u} - 3\vec{v} = 2[2,1,-3] - 3\,[1,2,4] = [4,2,-6] - [3,6,12] = [1,-4,-18]$
d) $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21} \approx 4.58$
e) $\vec{u} \cdot \vec{v} = [2,1,-3] \cdot [1,2,4] = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-3)4 = -8$
f) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = [10,-11,3]$
g) $\angle \vec{u}, \vec{v} = \alpha$: $\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-8}{\sqrt{14}\sqrt{21}} \approx -0.46657 \Leftrightarrow \alpha \approx 118^\circ$
h) $A = |\vec{u} \times \vec{v}| = |[10,-11,3]| = \sqrt{10^2 + 11^2 + 3^2} = \sqrt{230} \approx 15.2$

Alternativt: $A = \sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} = \sqrt{14 \cdot 21 - (-8)^2} = \sqrt{230}$
(Tallene allerede regnet ut i g).)

II

En trekantet pyramide $ABCD$ er gitt ved at ABC er grunnflate, D er toppunktet og hjørnene har koordinatene: $A = (0,1,0), B = (5,0,1), C = (2,3,2)$ og $D = (3,3,10)$.
Finn volumet av pyramiden.

Oppgave II krever lavt kompetansenivå: Formelinnsetting

$$V = \tfrac{1}{6}|(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}| = \tfrac{1}{6}|([5,-1,1] \times [2,2,2]) \cdot [3,2,10]| = \tfrac{1}{6}|[-4,-8,12] \cdot [3,2,10]| = \tfrac{4}{6}|[-1,-2,3] \cdot [3,2,10]| = \tfrac{2}{3}|23| = \tfrac{46}{3} \approx 15.3$$

III

a) Finn parameterfremstillingen for en linje l gjennom punktet $A = (1,0,2)$ som er parallell med vektoren $\vec{r} = [2,1,3]$.
b) Finn skjæringspunktet mellom l og xz –planet.

c) Undersøk om l er parallell med en linje gitt av m : $\left\{\begin{array}{c} x = \frac{8}{3}t \\ y = 1 + \frac{4}{3}t \\ z = 4t - 2 \end{array}\right\}$.

Oppgave III krever middels kompetansenivå: Må tenke litt og regne litt før man setter inn i standardformler, fler-trinns-oppgave.

a)
Med retningsvektor $\vec{r}$ og punkt A får vi
vektorform: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{r} \Leftrightarrow [x,y,z] = [1,0,2] + t[2,1,3] \Leftrightarrow$

Parameterform: $l : \left\{\begin{array}{c} x = 1 + 2t \\ y = \quad t \\ z = 2 + 3t \end{array}\right\}$

b)
xy –plan: $z = 0 \Rightarrow 2 + 3t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}$
$x = 1 + 2(-\frac{2}{3}) = -\frac{1}{3}$
$y = -\frac{2}{3}$
): Skjæringspunkt: $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0)$

c)
l har retningsvektor $\vec{r} = [2,1,3]$ og m har retningsvektor: $\overrightarrow{r_m} = [\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, 4]$
$\vec{r} \parallel \overrightarrow{r_m} \Leftrightarrow \vec{r} = k\overrightarrow{r_m}$:
$[2,1,3] = k[\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, 4] \Leftrightarrow 2 = \frac{8}{3}k \wedge 1 = \frac{4}{3}k \wedge 3 = 4k \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$

): l og m er parallelle fordi retningsvektorene er parallelle

Alternativt: $\vec{r} \parallel \overrightarrow{r_m} \Leftrightarrow \vec{r} \times \overrightarrow{r_m} = \vec{0}$
$\vec{r} \times \overrightarrow{r_m} = [2,1,3] \times [\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, 4] = [0,0,0]$

IV

Forklar hvordan du ville:
a) Undersøke om tre punkter A, B og C ligger på linje.
b) Undersøke om fire punkter A, B, C og D ligger i samme plan.

Oppgave IV krever middels kompetansenivå: Må tenke litt før man bruker standardformler, fler-trinns-oppgave.
Må i tillegg kunne uttrykke seg skriftlig og algebraisk.

a) Ekvivalent med å undersøk om feks. $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

b) A, B og C definerer et plan, og vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ ligger i dette planet.
Hvis D skal ligge i planet må $\overrightarrow{AD}$ kunne uttrykkes som $k\overrightarrow{AB} + l\,\overrightarrow{AC}$.
Dette gir en vektorligning $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} + l\,\overrightarrow{AC}$ som gir en selvmotsigelse hvis D ikke ligger i planet.

Alternativt kan man regne ut volumet av parallellepipedet utspent av $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AD}$ med $V = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$. Hvis dette volumet er 0, ligger D i planet.

V

Vi skal her vise hvordan vi kan finne avstanden fra et punkt P til en linje l:
Hvis linjen er gitt ved en parameterfremstilling, kan vi finne:

- Et punkt A på linjen. (Ved for eksempel å sette parameteren t til 0.)
- Retningsvektoren $\vec{r}$. (Koordinatene taes fra t-leddene i parameterfremstillingen.)

Arealet til et parallellogram utspent av $\overrightarrow{AP}$ og $\vec{r}$ er da gitt ved: $A = |\overrightarrow{AP} \times \vec{r}|$.
Samtidig er arealet lik grunnlinje•høyde, eller: $|\vec{r}|h$.
Setter vi disse to uttrykkene lik hverandre: $|\vec{r}|h = |\overrightarrow{AP} \times \vec{r}|$
Kan vi lage en formel for høyden: $h = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|}$
Denne høyden er også avstanden fra punktet P til l så vi har formelen:

Avstand fra P til l: $h = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|}$

Bruk denne formelen til å finne avstanden fra $P = (1, 5, 7)$ til linjen gitt av

$$l : \left\{ \begin{array}{c} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 2t \end{array} \right\}$$

Oppgave V krever høyt kompetansenivå: Må kunne lese og forstå matematisk tekst og anvende det man leser.
Må også forholde seg til hvordan tilegnet kunnskap kan brukes i nye og ukjente situsjoner.

$t = 0$ gir punkt på linjen l: $A = (0, 1, 2)$
$\overrightarrow{AP} = [1, 4, 5]$
Retningsvektor fra koeffisientene til t –leddene: $\vec{r} = [1, 3, 2]$

Formelen gir da avstanden: $h = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{|[1,4,5] \times [1,3,2]|}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}} =$

$$\frac{|[-7,3,-1]|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{7^2+3^2+1^2}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{59}}{\sqrt{14}} \approx 2.05$$

(Alternativt bruke $\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2|\vec{r}|^2 - (\overrightarrow{AP} \cdot \vec{r})^2}$ i telleren: $\frac{\sqrt{42 \cdot 14 - 23^2}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{59}}{\sqrt{14}}$)

VI

Vi har en trekantet pyramide $ABCD$ der ABC er grunnflate og D er toppunkt.
Pyramiden er da utspent av vektorene $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ og $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.
I sideflaten BCD, som er motstående til hjørnet A, er medianenes skjæringspunkt S.
Bevis at $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

(Fra R1:
Medianene i en trekant er linjestykker fra hjørner til midtpunktene på motstående sider.
Alle medianene skjærer hverandre i ett punkt.
Dette skjæringspunktet deler alle medianene i forholdet 1:2)

Oppgave VI krever høyt kompetansenivå, bevis krever god matematisk forståelse.
Må dessuten kunne resonnere, regne og uttrykke seg algebraisk.

Går fra A til S langs kjente vektorer:

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} =$$

$$\overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \qquad (M \text{ midtpunkt på } CD\text{, tegn figur!})$$

$$\overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{3}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) =$$

$$\overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{3}((\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}) - \overrightarrow{AB}) =$$

$$\overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{3}((\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}))\ - \overrightarrow{AB}) =$$

$$\vec{a} + \tfrac{2}{3}((\vec{b} + \tfrac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) - \vec{a}) =$$

$$\vec{a} + \tfrac{2}{3}\vec{b} + \tfrac{2}{3}\tfrac{1}{2}\vec{c} - \tfrac{2}{3}\tfrac{1}{2}\vec{b} - \tfrac{2}{3}\vec{a} =$$

$$\vec{a} + \tfrac{2}{3}\vec{b} + \tfrac{1}{3}\vec{c} - \tfrac{1}{3}\vec{b} - \tfrac{2}{3}\vec{a} =$$

$$\tfrac{1}{3}\vec{a} + \tfrac{1}{3}\vec{b} + \tfrac{1}{3}\vec{c} \qquad QED$$