6.3 - Teknikker

Terminologi:

Hva er en differensialligning:

En ***differensialligning*** er en ligning med en funksjon (y), dens deriverte ($y', y'', \dots$) og den uavhengige variabelen x.

$$xy' + y = x^2$$

Differensialligningens ***orden*** er den høyeste deriverte som forekommer i ligningen.
Ligningen i eksemplet over er altså av ***Første orden***.

En differensialligning er ***lineær*** hvis det ikke opptrer noen potenser av y –er (***deriverte eller ikke***).
Lineær: $y'' + x^2y' + e^xy = x$ Ulineære: $yy' + x^2y = e^x,\ y' + 3y^2 = x$

En første ordens, lineær differensialligning er ***separabel*** hvis vi kan skrive den på formen:
$f(y)y' = g(x)$, dvs. med alle y –ledd til venstre og alle x –ledd til høyre i ligningen.

Hva er en løsning av en differensialligning:

En ***løsning*** av en differensialligning er en funksjon y som passer i ligningen.

Eksempel: $xy' + y = x^2$

Spesielle løsninger: $y = \frac{x^2}{3}$, $y = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x}$

Vi viser at $\frac{x^2}{3}$ er en løsning:
$VS = xy' + y = x \cdot \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{3} = \frac{3x^2}{3} = x^2$
$HS = x^2$

I og med at integrasjon er nødvendig for å løse en differensialligning, dukker det opp integrasjonskonstanter:

Generell løsning: $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$ (Egentlig: Løsning***er***, det er uendelig mange av dem...)

Generelle løsninger inneholder ***alle*** løsningene til differensialligningen!

Initialbetingelser:

I praktiske eksempler må vi bestemme konstantene (C) vi har fått i løsningene.
Dette gjøres med initialbetingelser:

Eksempel:

I en dyrepopulasjon får 10% av dyrene 2 avkom i gjennomsnitt hvert år.
Vi lager en differensialligning:
Endring Δy i populasjonen y i en tidsperiode Δt:

$$\Delta y = y \cdot \frac{10}{100} \cdot 2\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t} = 0.2y$$

Lar vi $\Delta t \to 0$, får vi differensialligningen:

$$y' = 0.2y$$

Vi vil senere lære teknikker for å finne løsningen $y = Ce^{0.2t}$

Hvis vi vet at populasjonen er 1000 når $t = 0$, har vi ***initialbetingelsen***:

$$y(0) = 1000$$

som gir oss: $1000 = Ce^{0.2\cdot 0} \Leftrightarrow C = 1000$

Altså har vi den spesielle løsningen: $y = 1000e^{0.2t}$, t[år]

Retningsdiagrammer

Når differensialligningene kan skrives på formen $y' = f(x,y)$, kan vi lage såkalte ***retningsdiagrammer*** for løsningene, selvom vi ikke har funnet løsningen.

I et punkt $P = (x,y)$ på løsningskurven er stigningstallet til tangenten $y' = f(x,y)$.
Vi kan derfor tegne mange små tangenter til kurven ved å regne ut y' for mange verdier av x og y.
Se figur 271 i boken.

Differensialligningen $xy' + y = x^2$ kan feks. skrives som $y' = \frac{x^2-y}{x} = x - \frac{y}{x}$.

Løsningsmetoder:

Det vi har ventet på! Hvordan finner vi egentlig ***løsningene*** til disse differensialligningene?
Det enkle svaret: Ved hjelp av integrasjon, men, det krever ofte noen omforminger og triks for å få noen integral vi kan løse...

Metode I - Eksakte differensialligninger (6.2)

Hvis ligningen er på formen $y' = f(x)$ istedenfor den mer generelle $y' = f(x,y)$,
kan vi finne løsningen ved å integrere direkte:

$$y = \int f(x)dx$$

Eksempel: $y' = x + \cos(x) \Rightarrow y = \int(x + \cos(x))dx = \frac{x^2}{2} + \sin(x) + C$

Enkelt og greit, vi bruker ikke mer tid på det :-)

Metode II - Separable differensialligninger (6.3)

Hvis ligningen er på formen $f(y)y' = g(x)$ er den såkalt ***separabel***, med bare y-er til venstre og bare x –er til høyre.

Hvis vi integrerer på begge sider får vi: $\int f(y)y'dx = \int g(x)dx$

Her gjenkjenner vi ***kjerneregelen***! $y'dx = dy$! (Husk at vi hadde $u'dx = du$.)

Så vi kan gjøre variabelskifte på venstre side fra x til y:

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx$$

og får da

$$F(y) = G(x) + C,$$ der $F'(y) = f(y)$ og $G'(x) = g(x)$

Etter å ha innsett dette gjør vi i praksis slik:

$$y' = 0.2y$$

$$\frac{dy}{dx} = 0.2y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 0.2dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 0.2dx$$

$$\ln|y| = 0.2x + C_1 \Leftrightarrow y = e^{0.2x+C_1} \Leftrightarrow y = e^{0.2x}e^{C_1} = Ce^{0.2x}$$

Metode III: Produktsetningen

Produktsetningen for derivasjon kan brukes baklengs!

Eksempel: $xy' + y = x^2$

Hvis vi skriver den som $y'x + y1 = x^2$
gir produktsetningen oss $(yx)' = x^2$

og da kan vi integrere begge sider $yx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

og får løsningen $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$

Metode IV: Integrerende faktor

Denne metoden er en ***utvidelse*** av produktsetningen for tilfeller som er litt mer kompliserte enn i eksemplet over, det vil si ligninger på formen:

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Vi innfører den såkalt integrerende faktor: $IF = e^{\int f(x)dx}$

Multipliserer med denne og får:

$$y'e^{\int f(x)dx} + y\,e^{\int f(x)dx}f(x) = g(x)e^{\int f(x)dx}$$

Og her kan vi bruke produktregelen, da

$(e^{\int f(x)dx})' = e^{\int f(x)dx} f(x)$ ved hjelp av kjerneregelen:

$(y \cdot e^{\int f(x)dx})' = g(x)e^{\int f(x)dx}$

Så vi får $y = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx$, som vi forhåpentligvis klarer å integrere.

Eksempel:

$y' + \frac{1}{x}y = x$ $\qquad IF = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$ (Vi velger en løsning med integrasjonskonstant lik null.)

Mutiplikasjon med $IF = x$ gir:

$y'x + y1 = x^2$ og vi er tilbake til eksemplet over i metode III med produktsetningen:

$(yx)' = x^2 \Leftrightarrow yx = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$